Решение системы линейных уравнений

Лекция 5

СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Методы решения

- Прямые методы
  - Метод Гаусса
  - Метод Гаусса — Жордана
  - Метод Крамера
  - Матричный метод
  - др.
- Итерационные методы
  - Метод Якоби (метод простой итерации)
  - Метод Гаусса — Зейделя
  - Метод релаксации
  - Многосеточный метод

Прямые методы: Метод Гаусса

- Сначала элементарными преобразованиями матрица приводится к ступенчатому или треугольному виду

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} & = & \beta_1 \\ \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} & = & \beta_2 \\ & \ldots & \\ \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} & = & \beta_r \\ 0 & = & \beta_{r+1} \\ & \ldots & \\ 0 & = & \beta_m \end{cases}, \qquad \alpha_{1j_1}, \ldots, \alpha_{rj_r} \neq 0.$$

- После чего последовательно с конца вычисляются значения переменных x

$$\begin{cases} x_{j_1} + \widehat{\alpha}_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{1j_r}x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{2j_r}x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_2 - \widehat{\alpha}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{2j_n}x_{j_n} \\ & \ldots & \\ x_{j_r} & = & \widehat{\beta}_r - \widehat{\alpha}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{rj_n}x_{j_n} \end{cases}, \qquad \widehat{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_i}}, \quad \widehat{\alpha}_{ij_k} = \frac{\alpha_{ij_k}}{\alpha_{ij_i}}$$

Прямые методы: метод Гаусса — Жордана

Модификация метода Гаусса. Применяется для квадратных систем линейных уравнений.

Сначала матрица уравнения сверху вниз приводится к верхнему треугольному виду с единицами на главной диагонали.

После этого матрица снизу вверх приводится к диагональному виду, в результате в правой части уравнения остается решение всей системы.

Прямые методы: метод Крамера

- Вычисляются модифицированные определители исходной матрицы, где в i-м столбце ставится правый столбец уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Из этих определителей находится решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Прямые методы: матричный метод

- Исходное уравнение домножаем слева на обратную матрицу

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

- Для решения такого уравнения необходимо существование обратной матрицы

$$\det A \neq 0$$

Итерационные методы: метод Якоби

- Начальное представление уравнения

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

преобразуется к виду

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{g}$$

таким образом, что после выбора начального приближения решение уравнения находится итеративно по схеме

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{g},$$

Итерационные методы: метод Гаусса — Зейделя

- Левая часть уравнения приводится к нижнему треугольному виду

$$(\mathrm{L}+\mathrm{D})\vec{x} = -\mathrm{U}\,\vec{x} + \vec{b},$$

после чего вычисляются новые значения вектора решений

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + d_n \end{cases},$$

i-lab
Лаборатория НГУ-Интел

Итерационные методы: метод релаксации

- Сначала находятся невязки

$$
\begin{cases}
R_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_j^{(0)} \\
R_2^{(0)} = c_2 - x_2^{(0)} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} b_{2j} x_j^{(0)} \\
\dots \\
R_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} x_j^{(0)}
\end{cases}
$$

- После чего ищется максимальная невязка, и вычисляется следующая итерация

$$R_s^{(k)} = \delta x_s^{(k)} \Rightarrow R_s^{(k+1)} = 0, R_i^{(k+1)} = R_i^{(k)} + b_{is} \delta x_s^{(k)}$$

Решение находится по формуле $x_i \approx x_i^{(0)} + \sum_j \delta x_i^{(j)}$

Итерационные методы: многосеточный метод

Метод основан на использовании последовательности уменьшающихся сеток и операторов перехода от одной сетки к другой

Основная идея многосеточных методов состоит в том, что ошибка е, которая не может быть устранена методами релаксации, должна быть убрана с помощью коррекции из решения на грубой сетке.

Способы решения (решатели)

- Квадратная матрица
  - ?getrs(trans, n, nrhs, a, lda, ipiv, b, ldb, info)
- Ленточная матрица
  - ?gbtrs(trans, n, kl, ku, nrhs, ab, ldab, ipiv, b, ldb, info)
- Трехдиагональная матрица
  - ?gttrs(trans, n, nrhs, dl, d, du, du2, ipiv, b, ldb, info)
- пр.

Пример

```
*       Factorize A in the array AFB
        CALL SGBTRF(N,N,KL,KU,AFB,LDAFB,IPIV,INFO)

        IF (INFO.EQ.0) THEN

*          Compute solution in the array X
           CALL SGBTRS(TRANS,N,KL,KU,NRHS,AFB,LDAFB,
   +                   IPIV,X,LDX,INFO)

*          Improve solution, and compute backward errors and

*          estimated bounds on the forward errors

           CALL SGBRFS(TRANS,N,KL,KU,NRHS,AB,LDAB,AFB,
   +             LDAFB,IPIV,B,LDB,
   +             X,LDX,FERR,BERR,WORK,IWORK,INFO)
```