

Д. И. НАГИРНЕР

**Радиационные механизмы  
в астрофизике высоких энергий**

Курс лекций на  
Четвертой Школе Современной Астрофизики

Пушино  
2008

# Введение

Этот курс составлен на основе лекций, которые автор читает на астрономическом отделении математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета.

В лекциях рассматриваются основные радиационные механизмы, играющие важную роль в формировании спектров космических объектов и поэтому представляющие большой интерес для астрофизики. Это тормозной и рекомбинационный процессы, магнитотормозной механизм, комптоновское рассеяние, черенковское и переходное излучение, а также двухфотонные процессы с электрон-позитронными парами.

Современная астрофизика имеет дело с процессами, характеризующимися огромными энергиями, релятивистскими и ультрарелятивистскими частицами, объектами, движущимися со скоростями, близкими к скорости света. Поэтому в курсе большое внимание уделяется релятивистской формулировке уравнений, соотношений и формул и начинается курс с изложения основных положений теории относительности.

Большая часть содержания лекций основана на классической электродинамике. Для введения обозначений и напоминания этой теории кратко воспроизводятся некоторые положения классической теории излучения. В значительной степени это изложение базируется на курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [29]. Рассматриваются и релятивистские квантовые процессы, однако изложение квантовой электродинамики даже в ограниченном объеме потребовало бы слишком большого времени, поэтому сечения процессов берутся без вывода. Приводятся только диаграммы Фейнмана и законы сохранения. За подробностями можно обратиться к книгам, где систематически излагается квантовая электродинамика, например [6, 2]. Нерелятивистская квантовая механика не используется совсем.

Радиационным процессам в астрофизике посвящена книга Рыбицкого и Лайтмана [87]. Отличие этого курса от их книги заключается прежде всего в том, что мы обращаем гораздо большее внимание на точные указания тех предположений, которые делаются при выводе формул, и подробное рассмотрение частных случаев. Затрагиваются процессы, не рассмотренные в указанной книге. Кроме того, предполагается, что читатель, в общем, знаком с классической электродинамикой и элементами теории переноса излучения. В лекциях затруднительно дать сам вывод формул, за подробностями можно обратиться к учебному пособию автора [37].

В курсе используется система единиц CGSE, не рационализованная, так что в вакууме диэлектрическая постоянная равна 1.

Ссылки на формулы из другой главы даются с римской цифрой номера этой главы, предшествующей номеру формулы, например, ссылка (I.20) означает формулу номер 20 Главы I. Рисунки в каждой главе нумеруются независимо.

# Глава I. Основы теории относительности

## § 1 Основные положения

1. *Принцип относительности.* В 1905 году Альберт Эйнштейн опубликовал статью, в которой сформулировал основные принципы теории относительности, названную впоследствии специальной теорией в отличие от созданной в 1916 году тем же Эйнштейном общей теории относительности, которая по существу является теорией гравитационного поля.

Следует отметить, что создателем теории относительности нельзя признать одного Эйнштейна. Заметный вклад в нее внесли Лоренц, Минковский, Пуанкаре и другие. Эйнштейн, можно сказать, завершил построение теории, придав ей наиболее четкую и физическую форму.

Основной принцип теории относительности заключается в том, что все физические явления происходят одинаково в так называемых инерциальных системах отсчета. Инерциальными же системами называются такие системы координат, которые движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, то есть с постоянной скоростью, понимаемой в обычном смысле. Постулируется, что ускорение любой наблюдатель всегда сразу заметит, так что ускоренные системы исключаются.

В рамках основного принципа накладывается условие существования предельной скорости передачи сигналов, которая оказывается совпадающей со скоростью света в пустоте.

Одинаковость протекания явления означает и то, что уравнения, описывающие это явление, во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, а переход в записи уравнений от одной системы к другой производится посредством замены координат, включая и время, которое в разных системах может течь по-разному. Как говорят, все величины, соотношения и формулы должны быть ковариантны по отношению к таким преобразованиям.

Переход от одной системы отсчета к другой производился и в классической механике, но там преобразовывались только пространственные координаты, а время во всех системах текло одинаково (ньютоновская механика, преобразования Галилея). Впервые с необходимостью преобразования времени при переходе в другую систему отсчета столкнулся Лоренц, когда пытался найти преобразования, которые оставляют неизменным вид уравнений Максвелла. Однако по его собственному признанию, он не понял смысла преобразования времени. Совершенно ясно, что эти уравнения требовали именно релятивистских преобразований, так как электромагнитное поле и электромагнитные волны являются релятивистскими объектами.

Принцип ковариантности позволяет получать релятивистские обобщения нерелятивистских величин. Для такого обобщения нужно написать величину в явно релятивистском виде, а затем проверить, что в нерелятивистском пределе она принимает правильное значение. Такой же подход применим и к соотношениям, формулам, уравнениям и т.п. и мы много раз будем им пользоваться.

2. *События и интервал.* Каждое явление, происходящее в пространстве и во времени, характеризуется в некоторой системе отсчета четырьмя числами: тремя пространственными декартовыми координатами, объединяемыми в вектор  $\vec{r} = (x, y, z)$ , и моментом времени  $t$ .

Четыре числа  $x, y, z, t$  вместе задают точку пространства Минковского, которую часто и называют событием. В каждой из систем должна быть произведена синхронизация часов отдельно, так что каждому событию сопоставлен свой момент времени. В разных системах одному событию могут сопоставляться разные моменты времени, и это является правилом, а не исключением. Время в разных системах и течет по-разному. Отсутствие всеобщего единого времени, как уже говорилось, — характерная черта теории относительности.

Наряду с точками пространства Минковского рассматриваются и векторы. Вектором, как обычно в геометрии, называют упорядоченную пару точек. Пространство таких векторов также называем пространством Минковского. Мы будем называть четырехмерный вектор  $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$  вектором положения. Вектора пространства Минковского можно умножать на вещественные числа и складывать.

Между двумя событиями определяется “расстояние”, точнее, квадрат интервала

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2. \quad (1)$$

Если интервал равен нулю, это не означает, что события совпадают. Равенство нулю интервала между ними означает, что такие события могут быть соединены световым сигналом. Так как скорость света согласно принципу относительности одинакова во всех системах отсчета, то равный нулю в одной системе интервал равен нулю во всех инерциальных системах. Можно доказать (см., например, [29, 3]), что величина и не равного нулю интервала постоянна во всех системах отсчета.

По знаку квадрата интервалы классифицируются следующим образом. Если  $s_{12}^2 > 0$ , интервал называется времениподобным. Если, напротив,  $s_{12}^2 < 0$ , интервал пространственно подобен. Когда  $s_{12}^2 = 0$ , интервал нулевой, в этом случае события, как отмечалось выше, можно соединить световым сигналом.

Для простоты можно одно событие поместить в начало координат, а у координат второго опустить индексы. Тогда интервал запишется проще

$$s^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (2)$$

Часто достаточно (или предпочтительно) рассматривать бесконечно малый интервал

$$ds^2 = (ds)^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (3)$$

**3. Преобразование Лоренца.** Преобразование координат и времени, связывающее события в различных инерциальных системах и не изменяющее величины квадрата интервала, совпадает по виду с преобразованием, найденным Лоренцем, и называется преобразованием Лоренца.

Самое общее преобразование Лоренца включает повороты осей координат, отражения осей и изменение направления отсчета времени, а также изменение пространственных и временных масштабов. Для того, чтобы выяснить принципиальные особенности теории относительности, достаточно ограничиться теми преобразованиями, которые связаны только с переходом из одной инерциальной системы в другую. Поэтому мы будем считать, что две системы, которые связывает преобразование, совершенно идентичны, а соответствующие их координатные оси параллельны. Все различие между ними сводится к тому, что одна система, в которой находится наблюдатель, неподвижна по отношению к нему, а другая движется со скоростью, направление и величина которой задается вектором  $\vec{V}$ . Удобно принять, что начальные моменты в обеих системах совпадают и в этот общий момент совпадают положения начал координат систем. Координаты и время в первой системе будем обозначать просто  $\vec{r}, t$ , а соответствующие величины во второй снабжать штрихом. Для краткости обычно систему наблюдателя называют нештрихованной, а движущуюся по отношению к нему — штрихованной.

Тогда преобразование Лоренца, выражающее пространственные координаты и время некоторого события в штрихованной системе через координаты того же события в нештрихованной системе, можно записать в виде

$$\begin{aligned} t' &= \Gamma (t - \vec{V} \cdot \vec{r}/c^2), \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \Gamma \vec{V} t + (\Gamma - 1) (\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}/V^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Gamma$  — так называемый лоренцевский множитель, который всегда больше единицы:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5)$$

Для того, чтобы все координаты четырехмерного вектора имели одну размерность, обычно в качестве нулевой компоненты используется не само время  $t$ , а произведение  $ct$ . Равенство, выражающее преобразование координат, часто записывается также по-другому, так что преобразование Лоренца принимает вид

$$\begin{aligned} ct' &= \Gamma(ct - \vec{V} \cdot \vec{r}/c), \\ \vec{r}' &= \Gamma(\vec{r} - ct\vec{V}/c^2) + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{r})/V^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Второе слагаемое во втором равенстве перпендикулярно вектору  $\vec{V}$ .

Отметим некоторые свойства такого преобразования. Если записать его в матричном виде, то определитель матрицы окажется равным единице. Обратное преобразование получается заменой вектора  $\vec{V}$  на  $-\vec{V}$ , так как нештрихованная система движется по отношению к штрихованной с противоположной скоростью. Преобразования Лоренца, как правило, некоммутативны, то есть результат перехода из одной системы в другую зависит от порядка перехода через две промежуточные.

Если вектор скорости параллелен одной из координатных осей, то формулы, определяющие преобразование, сильно упрощаются. Пусть  $\vec{V} = V(0, 0, 1)$ . Тогда

$$t' = \Gamma(t - xV/c^2), \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \Gamma(z - Vt). \quad (7)$$

Такое преобразование называется частным преобразованием Лоренца.

## § 2. Простейшие эффекты

1. *Различие между интервалами.* Здесь продемонстрируем различие между времени- и пространственно-подобными интервалами.

а. *Времениподобный интервал.* Если в некоторой системе отсчета при фиксированных  $t$  и  $\vec{r}$  выполняется  $s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 > 0$ , то в системе, которая движется по отношению к первой со скоростью

$$\vec{V} = \vec{r}/t, \quad V = r/t < c, \quad \Gamma = ct/s, \quad (8)$$

для соответствующих времени и координат будет согласно (4)–(5)

$$t' = (ct/s)(t - \vec{r}^2/c^2t) = s/c, \quad \vec{r}' = \vec{r} - ct\vec{r}/tc = 0. \quad (9)$$

Таким образом, в этой, штрихованной системе  $s = ct'$ , то есть интервал свелся целиком к промежутку времени. Такое положение возможно, когда вектор  $\vec{r}$  связан с одним телом, тогда штрихованная система — это такая система, в которой положение тела в моменты 0 и  $t'$  совпадают. В частности, так будет, если тело в штрихованной системе вообще не движется.

б. Пространственноподобный интервал. Пусть  $s^2 < 0$ . Теперь выберем штрихованную систему, движущуюся относительно исходной со скоростью

$$\vec{V} = c^2 t \vec{r}/r^2, \quad V = c^2 t/r < c, \quad \Gamma = r/\sqrt{-s^2}. \quad (10)$$

Тогда согласно преобразованию Лоренца

$$t' = \Gamma(t - t) = 0, \quad \vec{r}' = \Gamma(\vec{r} - c^2 t \vec{r}/r^2) = \vec{r} \sqrt{-s^2}/r. \quad (11)$$

В этом случае два события произошли в штрихованной системе одновременно, а интервал  $s^2 = -(\vec{r}')^2$ .

2. *Лоренцево замедление времени.* Пусть два события происходят в штрихованной системе в одной точке, то есть  $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2$ . Это значит, что интервал между ними времениподобен. Выразим моменты их осуществления в нештрихованной системе через штрихованные координаты:

$$t_1 = \Gamma(t'_1 + \vec{V} \cdot \vec{r}'_1/c^2), \quad t_2 = \Gamma(t'_2 + \vec{V} \cdot \vec{r}'_2/c^2). \quad (12)$$

Поскольку их штрихованные пространственные координаты совпадают, то

$$t_2 - t_1 = \Gamma(t'_1 - t'_2). \quad (13)$$

Из последнего равенства следует, что разность в скобках всегда меньше, чем слева. Таким образом, промежуток времени между событиями в системе, в которой они происходят в одной точке, самое малое по сравнению со всеми другими системами. Если с двумя событиями связать одно и то же тело (или точку), то можно сказать, что в той системе, где тело покоится, время для него течет медленнее всего. Такая система называется собственной по отношению к рассматриваемому телу, а время в этой системе — его собственным временем.

Заметим, что все инерциальные системы полностью эквивалентны только до тех пор, пока мы не выделили среди них класс систем, связанных с каким либо телом — его собственные системы.

Рассматриваемый эффект называется лоренцевым замедлением времени. Его можно вывести и иначе. Записав квадрат бесконечно малого интервала для некоторого тела в дифференциальной форме, то есть

$$c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 = c^2 dt^2(1 - v^2/c^2) = c^2 d\tau^2, \quad (14)$$

мы получаем связь дифференциала собственного времени тела (в системе, где оно покоится,) со временем для него в любой другой системе, где его скорость равна по модулю  $v$ , а именно:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < dt. \quad (15)$$

Заметим, что мы обозначаем скорость системы  $\vec{V}$  заглавной буквой, а скорость тела — прописной  $\vec{v}$ , то же относится и к лоренцевскому множителю ( $\Gamma$  и  $\gamma$ ).

3. *Лоренцево сокращение.* Пусть теперь два события происходят в один и тот же момент в штрихованной системе. Тогда для их координат в нештрихованной системе имеем

$$\vec{r}_1 = \Gamma(\vec{r}'_1 + \vec{V} t'_1) + (\Gamma - 1) \left( \frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}'_1 \right) \times \frac{\vec{V}}{V}, \quad \vec{r}_2 = \Gamma(\vec{r}'_2 + \vec{V} t'_2) + (\Gamma - 1) \left( \frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}'_2 \right) \times \frac{\vec{V}}{V}. \quad (16)$$

Поскольку  $t'_1 = t'_2$ , то разность их координат можно записать в виде

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left( \frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \Gamma \left( \frac{\vec{V}}{V} \cdot (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \right) \frac{\vec{V}}{V}. \quad (17)$$

Так как разность векторов в штрихованной системе можно представить в виде следующей суммы

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \left( \frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \left( \frac{\vec{V}}{V} \cdot (\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) \right) \frac{\vec{V}}{V}, \quad (18)$$

то видно, что составляющие этих разностей, перпендикулярные вектору скорости, равны, в то время как проекции их на скорость отличаются на множитель  $\Gamma$ .

Полученным соотношениям дается следующая интерпретация. Будем считать нашими событиями два конца одного стержня. Он покоится в нештрихованной системе. Там его длину можно измерять в любой момент. В штрихованной же системе мерить длину стержня можно только в один и тот же момент времени. Тогда из написанных формул следует, что длина стержня самая большая в той системе, где он покоится. В системе координат, в которой стержень движется, размер его проекции на скорость меньше в  $\Gamma$  раз. Это и есть лоренцево сокращение. Оно наибольшее, если скорость стержня направлена вдоль его длины. Максимальная длина стержня называется его собственной длиной.

Так как сокращение происходит только в одном измерении, то объем тела сокращается тоже в  $\Gamma$  раз. Наибольший объем тела, который оно имеет в той системе, где покоится, называется его собственным объемом.

Элемент пространственного объема также самый большой в системе, где он покоится. Собственный элемент объема  $d^3r_0$  связан с элементом в системе, где он движется, равенством

$$d^3r_0 = \Gamma d^3r. \quad (19)$$

4. *Сложение скоростей.* Пусть  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  и  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$  — скорости движения одного тела в двух системах отсчета,  $\vec{V}$  — по-прежнему скорость штрихованной системы относительно нештрихованной. Посмотрим, как связаны эти скорости.

Записав преобразование Лоренца от штрихованной системы к нештрихованной в дифференциальной форме:

$$d\vec{r} = \Gamma(d\vec{r}' + \vec{V}dt') + (\Gamma - 1)\frac{\vec{V}}{V} \times \left( \frac{\vec{V}}{V} \times d\vec{r}' \right), \quad dt = \Gamma \left( dt' + \frac{\vec{V}}{c^2} d\vec{r}' \right), \quad (20)$$

поделим первое равенство на второе, а получившиеся числитель и знаменатель — на  $\Gamma dt'$ . Тогда получится

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (1 - 1/\Gamma)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')/V^2}{1 + \vec{V} \cdot \vec{v}'/c^2}. \quad (21)$$

Это равенство представляет закон сложения скоростей в релятивистской механике. Релятивистская поправка к простой сумме скоростей, малых по сравнению со скоростью света, в числителе дроби в (21) имеет порядок  $V^2/c^2$ , а знаменатель дает еще поправку порядка  $\vec{V} \cdot \vec{v}'/c^2$ .

Легко проверить, что при сложении любых скоростей, не превосходящих скорости света, результирующая скорость тоже не превзойдет скорости света. Напротив, сложение любой скорости со скоростью света дает скорость света.

Закон сложения скоростей сильно упрощается и становится наглядным, если скорости движения тела и системы коллинеарны. Тогда последнее слагаемое в числителе (21) исчезает, все три скорости направлены вдоль одной прямой и это равенство можно записать в скалярном виде:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}, \quad (22)$$

где величины  $v, v'$  и  $V$  могут, вообще говоря, быть как положительными, так и отрицательными.

Для полноты приведем формулу сложения перпендикулярных скоростей. Если  $\vec{v}' \perp \vec{V}$ , то

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'/\Gamma. \quad (23)$$

Здесь поправка к простой сумме имеет порядок  $V^2/c^2$ .

### § 3. Скаляры и векторы

1. *Скаляры.* Скалярами называются инварианты преобразования Лоренца, то есть величины, одинаковые во всех инерциальных системах координат.

Скаляры — это не просто постоянные. Скорость света является мировой константой, так же как заряд и масса электрона, постоянная Планка и другие. Скаляры — это величины, которые в разных системах отсчета имеют одинаковый вид (подобные выражения в координатах) и, кроме того, одинаковое значение. Примерами являются квадрат интервала  $s^2$  и элемент четырехмерного объема  $d^4r = c dt d^3r$  (и следовательно, сам четырехмерный объем). Их инвариантность может быть проверена непосредственно исходя из формул (4). Трехмерное расстояние и трехмерный объем скалярами не являются.

Как уже говорилось, если в пространстве имеется некоторое тело или материальная точка (нулевого объема), то из всех систем отсчета выделяется одна (с точностью до поворота вокруг начала координат), которая жестко

связана с этим телом — собственная его система. Все величины в этой системе отсчета называются также собственными по отношению к этому телу. В частности, его собственный трехмерный объем и собственное время (в отличие от их значений в других инерциальных системах) являются однозначными величинами, что следует из инвариантности их элементов  $d\tau = dt/\Gamma$  и  $d^3r_0 = \Gamma d^3r$  (их произведение — уже упоминавшийся скаляр  $d^4r/c$ ).

2. *Векторы.* Векторами в теории относительности называются элементы четырехмерного пространства, которое мы для простоты будем называть также пространством Минковского. Векторы, как и точки, задаются четырьмя числами-координатами: нулевой (или временной) и тремя пространственными. Векторы рассматриваются как свободные, то есть не прикрепляются к определенной точке пространства.

Обычно составляющие четырехмерных векторов перечисляют, нумеруя их цифрами 0, 1, 2, 3 или греческими буквами, причем индекс 0 относится к временной координате, а три других — к пространственным, объединяемым латинскими буквами, то есть

$$\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a^0, a^j\} = \{a^0, \vec{a}\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad \vec{a} = (a^1, a^2, a^3) = (a_x, a_y, a_z). \quad (24)$$

Чтобы четыре числа составляли вектор, они должны при переходе от одной инерциальной системы к другой (от нештрихованной к штрихованной или обратно) преобразовываться согласно преобразованию Лоренца, то есть так же, как координаты событий:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \vec{a} - a_0 \Gamma \vec{V}/c + (\Gamma - 1)(\vec{V} \cdot \vec{a})\vec{V}/V^2. \quad (25)$$

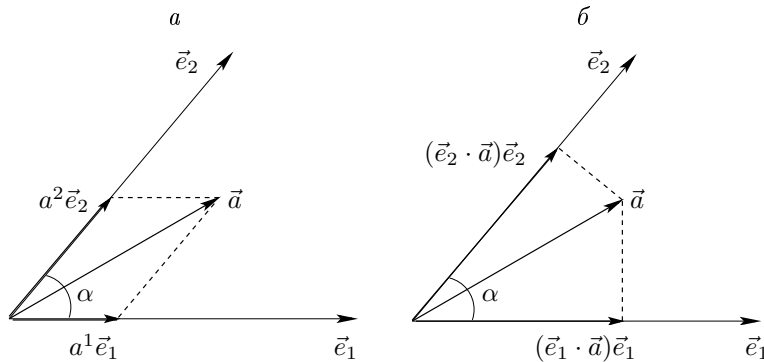
Это преобразование также можно записать с выделенной частью, перпендикулярной скорости:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \Gamma(\vec{a} - a_0 \vec{V}/c) + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{a})/V^2. \quad (26)$$

При переходе в другую систему отсчета изменяются составляющие четырехмерного вектора, сам вектор не изменяется. Однако для упрощения записи результата преобразования Лоренца мы будем отмечать соответствующими индексами обозначения не только составляющих, но и самого четырехмерного вектора.

Наряду с контравариантными составляющими используются ковариантные, у которых индексы записываются снизу:  $a_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Смысл введения двух видов координат станет ясен из следующего рассуждения.

3. *Координаты в неортогональных системах.* Координаты двух видов появляются уже в обычном, евклидовом пространстве, если используется не декартова система ортонормальных ортов, а неортогональные орты. Продемонстрируем различие координат на примере двумерного пространства (плоскости).



**Рис. 1.** Контравариантные и ковариантные координаты вектора: *a* — разложение на составляющие, *b* — проецирование.

Пусть между двумя ортами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  образован угол  $\alpha$ , то есть

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \alpha. \quad (27)$$

Произвольный вектор  $\vec{a}$  можно охарактеризовать по отношению к указанным ортам двумя способами. Один способ — разложить вектор по ортам (рис. 1*a*), то есть представить его в виде

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2. \quad (28)$$

Это будут контравариантные координаты. Другой способ — спроецировать вектор на орты (рис. 1*b*) и ковариантными координатами считать проекции (вместе с их знаками):

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a^1 + a^2 \cos \alpha, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2 = a^1 \cos \alpha + a^2. \quad (29)$$

Легко проверить, что квадрат вектора может быть представлен в следующих формах

$$\vec{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + 2 \cos \alpha a^1 a^2 = a^1 a_1 + a^2 a_2 = g_{mn} a^m a^n, \quad (30)$$

где по повторяющимся индексам  $m, n = 1, 2$  подразумевается суммирование, а так называемый метрический тензор представлен компонентами

$$g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = \cos \alpha. \quad (31)$$

Конечно, если угол между ортами прямой  $\alpha = \pi/2$ , то  $\cos \alpha = 0$ , внедиагональные элементы метрического тензора тоже нули и координаты не различаются.

Так как квадрат интервала пространства Минковского содержит только единицу и минус единицы, то метрический тензор этого пространства

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad (32)$$

а внедиагональные элементы равны нулю. Поэтому ковариантные составляющие вектора  $\underline{a}$ , обозначаемые  $\{a_\mu\}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , отличаются от контравариантных тем, что пространственные координаты имеют противоположный знак, то есть  $a_0 = a^0, a_k = -a^k, k = 1, 2, 3$ . Мы будем пользоваться только контравариантными, индексы которых пишутся сверху у обозначения вектора. Ввиду совпадения нулевых составляющих с верхним и нижним индексами в дальнейшем нулевой индекс будем писать внизу, а у пространственных часто будем указывать не номера, а оси проецирования. Как правило, четырехмерные векторы мы будем записывать в виде  $\underline{a} = \{a_0, \vec{a}\}$ , перечисляя их контравариантные составляющие.

4. *Скалярное произведение.* Для четырехмерных векторов определяется скалярное произведение. Если  $\underline{a} = \{a^\mu\}$  и  $\underline{b} = \{b^\mu\}$  — два вектора, то их скалярное произведение определяется как сумма попарных произведений их компонент разного вида:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \quad (33)$$

При нашем представлении векторов  $\underline{a} = \{a_0, \vec{a}\}$  и  $\underline{b} = \{b_0, \vec{b}\}$  их скалярное произведение мы будем записывать так:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (34)$$

Легко показать, что скалярное произведение векторов, в частности квадрат вектора  $\underline{a}^2 = a_0^2 - \vec{a}^2$ , являются скалярами, чем и объясняется название произведения.

Из-за минуса в определении (34) скалярное произведение не является положительно определенным, то есть квадрат вектора может иметь любой знак, а равенство нулю квадрата вектора не означает, что все его компоненты равны нулю, как и вектора положения. Поэтому вводится та же классификация векторов, что и интервалов. Именно, если  $\underline{a}^2 > 0$ , вектор  $\underline{a}$  называется времениподобным, если  $\underline{a}^2 < 0$ , — пространственно подобным, если  $\underline{a}^2 = 0$ , нулевым.

Ввиду неположительности скалярного произведения нельзя ввести угол между четырехмерными векторами. Однако, если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то говорят, что они ортогональны.

5. *Примеры векторов.* 1) Первым примером вектора служит вектор положения  $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$ . Его квадрат — квадрат интервала  $\underline{r}^2 = s^2$ . Частицы (или материальные точки) движутся по кривым в векторном пространстве, которые называют мировыми линиями. Дифференциал  $d\underline{r} = \{cdt, d\vec{r}\}$ , взятый вдоль мировой линии, — тоже вектор. Квадрат этого вектора представляет дифференциальную форму интервала

$$(d\underline{r})^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (35)$$

Такой интервал пространственно подобен. Можно рассматривать и времениподобные интервалы.

2) Другой вектор, который возникает сразу при задании системы координат, — это четырехмерный градиент

$$\underline{\nabla} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\} \quad (\vec{\nabla} \text{ — оператор Гамильтона набла}). \quad (36)$$

То обстоятельство, что здесь перед трехмерным градиентом надо поставить минус, иначе  $\underline{\nabla}$  не будет четырехмерным вектором, проверяется непосредственно. Однако, в такой необходимости можно убедиться и иначе: скалярное произведение дифференциала вектора положения и вектора градиента согласно определению (34)

$$d\underline{r} \cdot \underline{\nabla} = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} = d \quad (37)$$

есть оператор полного дифференциала. Как доказывается в курсе математического анализа, полный дифференциал инвариантен не только по отношению к линейной замене переменных, каковой является преобразование



Лоренца, но и по отношению к любым заменам. Вектор градиента без минуса имеет ковариантные составляющие, а мы записываем контравариантные. Квадрат вектора градиента

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square, \quad (38)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, представляет собой оператор Даламбера, который является скалярным.

#### § 4. Скорость, импульс, ускорение

1. *Скорость.* По аналогии с трехмерной скоростью тела  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  четырехмерная скорость определяется как отношение дифференциалов вектора положения и времени. Однако, чтобы скорость получилась четырехмерным вектором, надо четырехмерный вектор  $d\underline{r}$  делить (или умножать) на скаляр или величину, не зависящую от использования той или иной инерциальной системы. В качестве времени надо брать не время в какой-то произвольной системе отсчета, а собственное время для данного тела (материальной точки, частицы). Таким образом, по определению

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{ct, \vec{r}\} = \{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \gamma \{c, \vec{v}\}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (39)$$

где  $\vec{v}$  — обычная трехмерная скорость. Лоренцевский множитель  $\gamma$ , соответствующий скорости тела, обязательно должен входить в составляющие вектора, но мы иногда будем писать его вне фигурных скобок.

Квадрат четырехмерной скорости

$$\underline{v}^2 = c^2 > 0, \quad (40)$$

так что вектор скорости времениподобен.

Часто мы будем использовать обозначение для отношения скорости к скорости света и называть его безразмерной (трехмерной или четырехмерной) скоростью тела:

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c} = \{\gamma, \gamma \vec{\beta}\}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}. \quad (41)$$

2. *Импульс.* Импульс — это просто скорость, умноженная на массу, но для его составляющих вводятся отдельные обозначения:

$$\underline{p} = m\underline{v} = m\{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \{p_0, \vec{p}\}, \quad p_0 = mc\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma. \quad (42)$$

Ясно, что вектор импульса тоже времениподобен:

$$\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 > 0. \quad (43)$$

Из последнего равенства вытекает выражение нулевой составляющей через пространственный импульс

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + p^2} = mc\gamma, \quad p = |\vec{p}|, \quad (44)$$

а из него выражение лоренцевского множителя через тот же импульс

$$\gamma = \sqrt{1 + (p/mc)^2}. \quad (45)$$

С помощью (45) можно выразить и скорость через импульс:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}. \quad (46)$$

Нулевая составляющая вектора импульса — это с точностью до множителя энергия. Удобно ввести обозначение для кинетической энергии релятивистской частицы

$$E_{\text{kin}}(p) = p_0 c - mc^2 = mc^2(\gamma - 1), \quad p = |\vec{p}|, \quad (47)$$

то есть вычитать из полной энергии энергию покоя  $mc^2$ . Отметим, что сразу после создания теории относительности большой резонанс вызвало соотношение  $E(p) = cp_0 = mc^2\gamma$  между двумя различными физическими величинами — энергией и массой — и массой стали называть произведение  $m\gamma$  (масса движения). Мы под термином масса всегда будем понимать массу покоя  $m$ .

Легко проверить, что абсолютная величина трехмерной скорости — это производная от энергии по импульсу:

$$v = |\vec{v}| = \frac{dE(p)}{dp} = c \frac{d\sqrt{m^2c^2 + p^2}}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}. \quad (48)$$

### 3. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

1) Если  $v \ll c$ , то есть частица движется со скоростью гораздо меньшей скорости света, то  $\gamma \sim 1$  и  $p \ll mc$ . Тогда в нерелятивистском пределе получается

$$\vec{p} \approx m\vec{v}, \quad E_{\text{kin}} \approx mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2c^2} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}, \quad (49)$$

то есть обычные нерелятивистские соотношения.

2) При  $v \sim c$  лоренцевский множитель велик  $\gamma \gg 1$ , а  $p \gg mc$ . Тогда  $E_{\text{kin}}(p) \sim E(p) \sim pc$ . Соотношение (48) сохраняется в обоих предельных случаях.

4. *Элемент объема в пространстве импульсов.* Как и элемент пространственного объема, элемент объема импульсов  $d^3p$  не является скаляром. Инвариантно отношение  $d^3p/p_0$ . Доказательство этого помимо прямой проверки путем применения преобразования Лоренца можно провести следующим образом.

Откажемся временно от соотношения (44) и будем считать нулевой составляющую четырехмерного импульса электрона  $p_0$  независимой величиной. Очевидно, что произведение четырех дифференциалов  $d^4p = dp_0 d^3p$  — скалярная величина. От искусственно введенной независимой координаты  $p_0$  надо избавиться, то есть взять по ней интеграл. Для учета соотношения (44) введем множителем инвариантную дельта-функцию  $\delta(p^2 - m^2c^2)$ :

$$\begin{aligned} \int \delta(p^2 - m^2c^2) d^4p &= d^3p \int dp_0 \delta(p_0^2 - p^2 - m^2c^2) = \\ &= d^3p \int dp_0 \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)\left(p_0 + \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)\right) = \\ &= d^3p \int dp_0 \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)2\sqrt{p^2 + m^2c^2}\right) = \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2 + m^2c^2}}. \end{aligned} \quad (50)$$

При проведении выкладки было учтено, что в нуль в аргументе дельта-функции обращается только множитель с разностью, а при переходе к последнему выражению множитель с суммой был упрощен (заменен удвоенным корнем) и вынесен из-под знака этой функции в знаменатель, так как замена переменной интегрирования дает тот же результат. В дальнейшем в знаменателе вместо корня для краткости будем писать  $p_0$ , считая соотношение (44) выполненным.

5. *Ускорение.* Оно определяется по аналогии со скоростью

$$\underline{w} = \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{v}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \{c, \vec{v}\}. \quad (51)$$

Найдем сначала производную от лоренцевского множителя. При дифференцировании удобно использовать очевидное равенство  $\vec{v}^2 = v^2$ . Имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2}, \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (52)$$

Тогда получаем

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c}, \vec{w} + \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{c^2} \vec{v} \right\}. \quad (53)$$

Как и скорость, ускорение удобно записать через вектор  $\vec{\beta}$ :

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w}, \vec{w} + \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w}) \vec{\beta} \right\}. \quad (54)$$

Вектор ускорения, как нетрудно убедиться, ортогонален вектору скорости. Действительно,

$$\underline{\beta} \cdot \underline{w} = \gamma^3 \left( \gamma^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w} - \vec{\beta} \cdot \vec{w} - \gamma^2 \beta^2 \vec{\beta} \cdot \vec{w} \right) = 0. \quad (55)$$

Это естественное соотношение для вектора, квадрат которого не зависит от времени. Аналогично трехмерная скорость тела, движущегося по поверхности шара, перпендикулярна радиальному направлению центростремительного ускорения.

6. *Квадрат ускорения.* Эта величина, интересная сама по себе, используется в теории излучения. Поэтому проделаем следующую выкладку.

$$\begin{aligned}\underline{w}^2 &= \gamma^4 \left[ \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 - \vec{w}^2 - \gamma^4 \beta^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 - 2\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 \right] = \\ &= \gamma^6 \left[ -\vec{w}^2 (1 - \beta^2) - (\vec{\beta} \cdot \vec{w})^2 \right] = \gamma^6 \left[ -\vec{w}^2 + (\vec{\beta} \times \vec{w})^2 \right].\end{aligned}\quad (56)$$

Из приведенной выкладки видно, что вообще говоря, вектор ускорения пространственно подобен. Однако, если пространственное ускорение  $\vec{w} = 0$ , то и четырехмерный вектор нулевой.

7. *Относительная скорость.* Это важное понятие очень просто вводится в обычной нерелятивистской механике: там относительная скорость равна разности скоростей. Ясно, что такое определение не подходит в теории относительности.

Как и в нерелятивистской механике, необходимо различать порядок частиц при определении относительной скорости. Назовем скоростью второй частицы относительно первой скорость ее в той системе отсчета, где первая покоится.

Пусть скорости частиц в какой-то системе равны соответственно

$$\underline{v}_1 = \gamma_1 \{c, \vec{v}_1\}, \quad \underline{v}_2 = \gamma_2 \{c, \vec{v}_2\}.\quad (57)$$

Применим преобразование Лоренца со скоростью  $\vec{V} = \vec{v}_1$ . Тогда в системе покоя первой частицы будет

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= \{\gamma_1^2 (c - \vec{v}_1^2/c), 0\} = \{c, 0\}, \\ \underline{v}_2 &= \{\gamma_1 \gamma_2 (c - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2/c), \gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \gamma_2 \vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1) \gamma_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1 / v_1^2\}.\end{aligned}\quad (58)$$

Лоренцевский множитель у скорости второй частицы в системе покоя первой

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 / c^2) = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 / c^2 = \gamma_r\quad (59)$$

на самом деле не зависит от порядка частиц и является релятивистским инвариантом, так как выражается через скалярное произведение их четырехмерных скоростей. Для трехмерной же скорости второй частицы относительно первой, исключив из ее выражения

$$v_1^2 = c^2 (1 - 1/\gamma_1^2), \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = c^2 (1 - \gamma_r / \gamma_1 \gamma_2),\quad (60)$$

найдем

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left[ \vec{v}_2 - \gamma_1 \vec{v}_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \left( \gamma_1 - \frac{\gamma_r}{\gamma_2} \right) \vec{v}_1 \right] = \frac{1}{\gamma_r} \left( \gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \frac{\gamma_2 + \gamma_r}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 \right).\quad (61)$$

Квадрат относительной скорости

$$v_{21}^2 = |\vec{v}_{21}|^2 = \frac{c^2}{\gamma_r^2} \left[ \gamma_2^2 - 1 + \frac{\gamma_r^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_r \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 - 1) - 2 \frac{\gamma_r + \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_r) \right],\quad (62)$$

как и лоренцевский множитель, не зависит от системы координат и от порядка частиц. Величину этой скорости можно записать в другом виде, через трехмерные скорости частиц:

$$v_r = v_{12} = v_{21} = c \sqrt{1 - 1/\gamma_r^2} = c \frac{\sqrt{c^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}.\quad (63)$$

Если скорость одной из частиц равна скорости света, то и относительная скорость равна  $c$ . Если скорости параллельны, то

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_r} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).\quad (64)$$

При перпендикулярных скоростях

$$\gamma_r = \gamma_1 \gamma_2, \quad \vec{v}_{21} = \vec{v}_2 / \gamma_1 - \vec{v}_1.\quad (65)$$

Сумма взаимных относительных скоростей, конечно, симметрична относительно частиц:

$$\vec{v}_{12} + \vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_r} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right) - \frac{\gamma_r - 1}{\gamma_r} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right),\quad (66)$$

но равна нулю только в нерелятивистском пределе или в случае, если скорости обеих частиц совпадают ( $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ , так как тогда  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $\gamma_r = 1$ ).

## § 5. Импульс и энергия фотона

1. *Импульс фотона.* Здесь мы считаем фотон просто частицей, движущейся со скоростью света. Если фотон летит в некоторой системе отсчета (назовем ее системой наблюдателя или нештрихованной) в направлении вектора  $\vec{l}$ , то его путь можно охарактеризовать радиусом-вектором

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}_0 + c\vec{l}(t_{\text{ph}} - t_0), \quad (67)$$

где  $\vec{r}_0$  — место фотона в начальный момент отсчета его времени  $t_{\text{ph}} = t_0$ . Можно образовать и четырехмерный вектор

$$x_{\text{ph}} = \{ct_{\text{ph}}, \vec{r}_{\text{ph}}\} = \left\{ ct_{\text{ph}}, \vec{r}_0 + c\vec{l}(t_{\text{ph}} - t_0) \right\}. \quad (68)$$

Мы можем формально продифференцировать вектор (68) по времени:

$$\frac{dr_{\text{ph}}}{dt_{\text{ph}}} = \{c, c\vec{l}\}. \quad (69)$$

Однако в результате не получится четырехмерный вектор, так как время в определенной системе отсчета не является инвариантом. Определения предыдущего параграфа годятся только для частиц с массой покоя, отличной от нуля. Фотон же имеет нулевую массу покоя, для него не существуют собственное время, собственная системы отсчета, и он обязан мчаться в пространстве со скоростью света в любой системе. Для этой частицы невозможно ввести понятие четырехмерной скорости, так как лоренцевский множитель для нее обращается в бесконечность. Следовательно невозможно ввести и импульс так, как это было сделано выше.

Тем не менее, фотон имеет энергию и импульс. Если круговая частота фотона равна  $\omega$ , то его энергия равна  $\hbar\omega$  согласно предположению М. Планка. А. Эйнштейном был определен и импульс фотона, величина которого, как у ультрарелятивистской частицы, равна энергии, деленной на скорость света,  $\hbar\omega/c$ , а направление совпадает с направлением движения фотона. Эти определения согласуются с введенным де Бройлем для любой частицы понятием длины волны, равной  $\lambda_{\text{B}} = \frac{h}{mv\gamma}$  или  $\lambda_{\text{B}} = \frac{\hbar}{mv\gamma}$ . Тогда  $mv\gamma = \frac{\hbar}{\lambda}$ . Для фотона  $\lambda = \frac{c}{\omega}$  и, хотя масса его равна нулю, а множитель Лоренца — бесконечности, произведение  $mv\gamma$  можно считать конечным и равным  $\frac{\hbar\omega}{c}$ .

Тем самым оказывается возможным ввести четырехмерный вектор импульса фотона

$$\underline{k} = \{k, \vec{k}\} = \frac{\hbar}{c} \left\{ \omega, \omega \vec{l} \right\}, \quad k = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad \vec{k} = k\vec{l}, \quad |\vec{l}| = 1. \quad (70)$$

Импульс и энергия фотона являются существенно квантовыми величинами и их выражения содержат постоянную Планка. Если желательно оставаться в рамках классической электродинамики, то вместо векторов импульса можно использовать волновые векторы, а вместо энергии — волновое число:

$$\underline{\alpha} = \frac{k}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{k}{\hbar} = \frac{\omega}{c}, \quad \vec{\alpha} = \frac{\vec{k}}{\hbar} = \alpha\vec{l}. \quad (71)$$

Эти величины отличаются от квантовых на постоянный множитель и релятивистские свойства у них те же самые.

Применение к импульсу фотона преобразования Лоренца выявляет два важных эффекта.

2. *Эффект Доплера.* Запишем формулу преобразования от нештрихованной системы отсчета к штрихованной, движущейся относительно первой со скоростью  $\vec{V} = V\vec{e}$ . Как и выше, пусть единичные векторы, в направлении которых летит фотон, обозначаются  $\vec{l}$  и  $\vec{l}'$ , а углы, образуемые этими ортами с вектором скорости,  $\theta$  и  $\theta'$ . Тогда нулевые составляющие вектора импульса фотона, то есть его величины или, что в сущности то же самое, его частоты (или энергии) преобразуются следующим образом:

$$\omega' = \omega\Gamma \left( 1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{V}}{c} \right) = \omega\Gamma \left( 1 - \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l} \right), \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}. \quad (72)$$

Обратное преобразование получается, как обычно, заменой скорости на противоположную ( $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$ ):

$$\omega = \omega'\Gamma \left( 1 + \frac{\vec{l}' \cdot \vec{V}}{c} \right) = \omega'\Gamma \left( 1 + \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l}' \right), \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\Gamma(1 + V \cos \theta'/c)}. \quad (73)$$

Приведенные формулы, если отбросить лоренцевский множитель  $\Gamma$ , выражают обычный классический эффект, установленный в 1842 году Х. Доплером. Если светящийся объект летит к наблюдателю, частота света увеличивается, если от него — уменьшается. Наличие множителей  $\Gamma$  показывает, что даже при перпендикулярном по отношению к наблюдателю движении фотона, происходит сдвиг (увеличение) его частоты. Это явление называется поперечным эффектом Доплера. Он не существует согласно классической теории. Поскольку его поправка имеет порядок  $V^2/c^2$ , то есть второго порядка малости по отношению к поправке, пропорциональной скорости  $V/c$ , поперечный эффект не был замечен до создания теории относительности.

Линейный же эффект имеет простое объяснение, которое подходит и для звуковых колебаний и заключается в том, что движущийся наблюдатель в зависимости от направления своего движения встречает больше или меньше волн (периодов), чем неподвижный. То же происходит, если движется источник. Для звука такое объяснение было известно давно, так как эффект легко заметен даже при не очень больших скоростях.

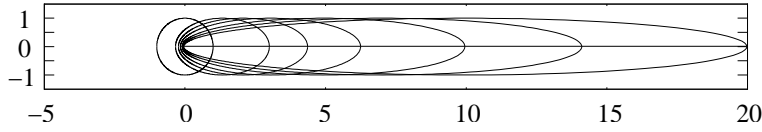
Дробь, равная отношению частот в (72)

$$D(V, \theta) = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}, \quad (74)$$

называется множителем Доплера или доплер-фактором. Этот множитель появляется во многих выражениях для разных величин. Отметим его значения “вперед” и “назад”, а также их отношение:

$$D(V, 0) = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}, \quad D(V, \pi) = \frac{1}{D(V, 0)} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}, \quad \frac{D(V, 0)}{D(V, \pi)} = D^2(V, 0) = \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \quad (75)$$

На рис. 2 представлены диаграммы зависимости этого множителя от угла  $\theta$  при скоростях  $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$ . Соответствующие значения лоренцевского множителя  $\Gamma = 1.67, 2.29, 3.20, 5.03, 7.09, 10.01$ , а значения “вперед”  $D(V, 0) = 1, 4.36, 6.24, 9.95, 14.11, 19.97$ .



**Рис. 2.** Зависимость доплер-фактора от направления при скоростях источника  $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$ .

При скоростях, близких к скорости света, диаграммы сильно вытянуты вперед, так что фактически угол  $\theta$  заключен в узких пределах, порядка  $1/\Gamma$ . В связи с этим обычно применяется приближенное представление функции  $D(V, \theta)$ . Разность, заключенную в скобках, заменяют по схеме

$$1 - \frac{V}{c} \cos \theta = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + V/c} + \frac{V}{c} (1 - \cos \theta) \sim \frac{1}{2\Gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \Gamma^2 \theta^2}{2\Gamma^2}. \quad (76)$$

Тогда множитель приобретает вид

$$D(V, \theta) \sim \frac{2\Gamma}{1 + \Gamma^2 \theta^2}. \quad (77)$$

Такую замену угла при ультрарелятивистских скоростях мы будем неоднократно применять.

3. *Аберрация.* Преобразование пространственной составляющей импульса фотона при переходе от нештрихованной системы к штрихованной выглядит так:

$$\omega' \vec{l}' = \omega \vec{l} - \Gamma \omega \frac{V}{c} \vec{e} + (\Gamma - 1) \omega (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e}. \quad (78)$$

Отсюда находим закон преобразования ортов направлений распространения фотона:

$$\vec{l}' = \frac{\vec{l} - (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (79)$$

Обратное по отношению к (79) преобразование имеет тот же вид, но с заменой  $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$

$$\vec{l} = \frac{\vec{l}' - (\vec{e} \cdot \vec{l}') \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}. \quad (80)$$

Три вектора  $\vec{e}$ ,  $\vec{l}$  и  $\vec{l}'$  лежат в одной плоскости, назовем ее плоскостью аберрации.

В числителях дробей в формулах (79) и (80) первые два слагаемых составляют векторы, перпендикулярные вектору  $\vec{e}$ , а оставшиеся — параллельные ему. В связи с этим легко написать следующие соотношения:

$$\vec{e} \cdot \vec{l} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c}{1 + V\vec{e} \cdot \vec{l}'/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l} = \frac{\vec{e} \times \vec{l}'}{\Gamma(1 + V\vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}, \quad (81)$$

$$\vec{e} \cdot \vec{l}' = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c}{1 - V\vec{e} \cdot \vec{l}/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l}' = \frac{\vec{e} \times \vec{l}}{\Gamma(1 - V\vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (82)$$

Из (78) вытекает также соотношение между векторными произведениями:

$$\omega \vec{l}' \times \vec{l} = \omega[\Gamma V/c - (\Gamma - 1)\vec{e} \cdot \vec{l}]\vec{l} \times \vec{e}. \quad (83)$$

Равенства (81) и (82) можно записать через тригонометрические функции:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + V \cos \theta'/c}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - V \cos \theta/c}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\Gamma(1 + V \cos \theta'/c)}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)}. \quad (84)$$

Из этих соотношений или из равенства (83) с учетом (72) следует, что

$$\sin(\theta' - \theta) = \sin \theta \frac{V/c - (1 - 1/\Gamma) \cos \theta}{1 - V \cos \theta/c}. \quad (85)$$

Нетрудно вывести еще одно соотношение между углами:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = D(V, \pi) \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}, \quad (86)$$

которое показывает, что если угол  $\theta'$  не равен 0 или  $\pi$ , он всегда больше угла  $\theta$ , то есть вектор  $\vec{l}$  располагается между векторами  $\vec{e}$  и  $\vec{l}'$ .

Отметим частные и предельные случаи. Понятно, что при  $V = 0$  (или даже при  $V \ll c$ ) абберации нет и  $\vec{l} = \vec{l}'$ . Напротив, если формально положить  $V = c$ , то вектор  $\vec{l}$  сольется с вектором скорости  $\vec{l} = \vec{e}$ . При  $\theta' = \pi/2$  будет  $\cos \theta = V/c$ ,  $\sin \theta = 1/\Gamma$ . Чтобы оказалось  $\theta = \pi/2$  нужно, чтобы было  $\cos \theta' = -V/c$ ,  $\sin \theta' = 1/\Gamma$ .

Рис. 3 дает представление о зависимости между углами  $\theta$  и  $\theta'$  при скоростях  $V/c = 0(0.1)0.9$ , а также  $V/c = 0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999, 0.9995, 0.9999$ . На рис. 4 показаны положения вектора  $\vec{l}$  при  $\theta' = \pi/3$  и  $V/c = 0, 1/3, 1/2, 4/5, 12/13$  и 1. Соответствующие значения  $\Gamma = 1, 3/(2\sqrt{2}), 2/\sqrt{3}, 5/3, 13/5, \infty$ . Крайние значения, как отмечалось, соответствуют векторам  $\vec{l}'$  и  $\vec{e}$ .

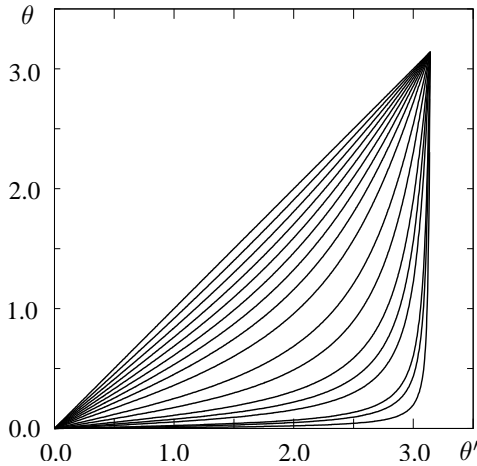


Рис. 3. Зависимость угла  $\theta$  от угла  $\theta'$  при различных скоростях источника.

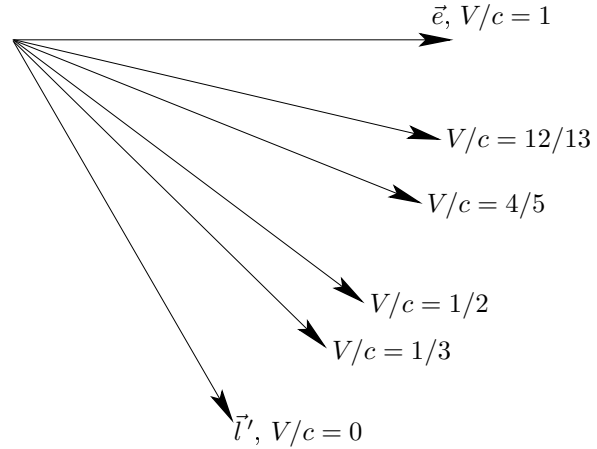


Рис. 4. Положения вектора  $\vec{l}$  при  $\theta' = \pi/3$  и различных скоростях источника.

4. *Классическая формула абберации.* Если в (85) отбросить члены порядка выше первого по скорости, то получится классическая формула абберации

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{V}{c} \sin \theta. \quad (87)$$

Аберрация, то есть изменение направления на движущийся объект или восприятие объекта движущимся наблюдателем, проявляется не только для света. Очевидна аберрация дождя: даже если он идет вертикально, человеку, бегущему со скоростью, сравнимой со скоростью падения дождевых капель, эти капли будут попадать в лицо. Конечно, картину портит ветер. На аберрацию звука, по-видимому, внимания не обращали, хотя эффект Доплера для звука хорошо известен. Восприятие направления звука человеком не столь определено, как высота звучания, а скорости, сравнимые со скоростью звука были достигнуты только в эпоху самолетов.

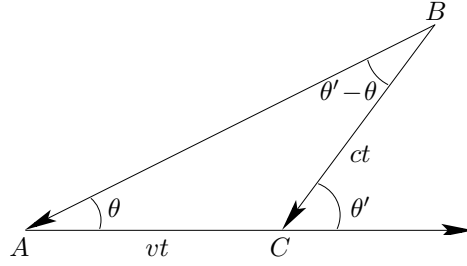


Рис. 5. Объяснение классической аберрации.

Аберрация света за счет движения Земли была открыта Брадлеем при попытке измерить параллаксы звезд. Он же дал следующее объяснение этому явлению (рис. 5). Пусть неподвижный наблюдатель из точки  $A$  видит источник света, находящийся в точке  $B$  на достаточно большом расстоянии от него, под углом  $\theta$  к направлению скорости другого наблюдателя. Тогда движущийся наблюдатель увидит тот же источник под другим углом,  $\theta'$ , к той же скорости, так как пока он двигался, свет от источника тоже прошел некоторый путь и наблюдатель воспринял его в точке  $C$ . За одно и то же время  $t$  наблюдатель продвинулся на расстояние  $vt$ , а свет прошел путь  $ct$ . В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $\theta$ , а внешний угол  $C$  —  $\theta'$ , так что угол  $B$  — это их разность  $\theta' - \theta$ . Проекции этих расстояний на перпендикуляр к стороне  $AB$ , то есть высота из вершины  $C$ , должны быть равны:

$$vt \sin \theta = ct \sin(\theta' - \theta), \quad (88)$$

что совпадает с формулой классической аберрации. Интересно отметить, что эффект не зависит от времени  $t$ , то есть от удаленности источника. Строгую формулу можно вывести только исходя из теории относительности. Точность измерений Брадлея была достаточна для обнаружения аберрации, но недостаточна для ее устранения, так что параллаксы звезд определили другие. Для таких измерений можно обойтись классическими формулами эффекта Доплера и аберрации, так как скорости движения Земли и большинства звезд существенно меньше скорости света.

6. *Инварианты.* При преобразованиях Лоренца импульса фотона ряд величин остается неизменными. Так из (78) следует, что

$$\omega' \vec{l}' \times \vec{e} = \omega \vec{l} \times \vec{e}. \quad (89)$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства, найдем

$$\omega' \sin \theta' = \omega \sin \theta, \quad (90)$$

так что произведение частоты фотона на синус угла, образуемого его импульсом со скоростью системы отсчета, является инвариантом.

Другой инвариант связан с элементом объема в пространстве импульсов. Продифференцировав второе из соотношений (84), получим

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma^2(1 - V \cos \theta/c)^2} d\theta = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (91)$$

Таким образом, инвариантом является произведение  $\omega^2 \sin \theta d\theta$ , а значит, и  $\omega d\theta$ .

Инвариантны также элемент объема в пространстве импульса фотона, деленный на частоту или на величину импульса  $d^3k/k$ , и элемент телесного угла, умноженный на квадрат импульса  $k^2 d^2l$ , что проверяется непосредственно или на основе приведенных в этом параграфе формул для преобразованных частот и углов. Инвариантом является и отношение  $dk/k$ .

Для частиц с ненулевой массой инвариантной величиной, как отмечалось выше, служит отношение  $d^3p/p_0$ . Заметим однако, что этот инвариант не допускает разделения на инвариантные сомножители, как в случае фотона, имеющего нулевую массу.

## § 6. Проявления эффектов относительности

1. *Проявления в физике.* В обычной жизни мы не встречаемся с телами, скорости которых сравнимы со скоростью света. Именно поэтому появившаяся в начале двадцатого века теория относительности произвела сильное впечатление на ненаучную и даже научную общественность, вызвала появление многих объясняющих ее явления статей и книг как физических, так и популярных. За сто лет, прошедших с тех пор, эта теория стала уже привычной, хотя все время возникают тщетные попытки либо опровержения ее, либо уточнения. Никаких явлений, противоречащих теории относительности, не установлено.

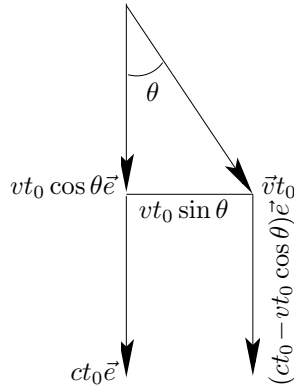
Теория относительности давно стала одной из незыблемых и широко используемых разделов физики с теоретической точки зрения, так как почти все другие ее разделы используют аппарат теории относительности. Электродинамика с самого начала была релятивистской, даже до осознания физиками этого факта. Построены релятивистская квантовая электродинамика, релятивистская гидро- и газодинамика, релятивистская статистическая физика и т. д.

Релятивизм проявляется и в практической физике. В ускорителях частицы разгоняются до очень высоких энергий и скоростей, в результате чего весьма короткоживущие частицы (резонансы) благодаря замедлению их собственного времени успевают достаточно долго продержаться и быть вовлеченными в эксперименты. То же происходит и в ливнях частиц, порождаемых космическими лучами в земной атмосфере. Обнаружен и поперечный эффект Доплера.

Особенную роль релятивистская теория играет в астрофизике. Никакие ускорители не могут произвести частицы столь больших энергий, с какими приходится иметь дело астрофизикам.

2. *Сверхсветовые скорости.* Вообще говоря, скорости, превышающие скорость света, наблюдаются. Например, каждые сутки все галактики обращаются вокруг Земли, но это обращение кажущееся. С очень большими скоростями могут перемещаться световые отблески или зайчики, но они также не передают никаких сигналов, так как при этом перемещаются разные фотоны. Особого рассмотрения требуют сверхсветовые движения в космологии, но и там они объясняются расширением пространства, а не передачей сигналов.

Частицы, которые движутся со скоростями, большими скорости света, называются тахионы. Много статей посвящено доказательству, что рассуждать о таких частицах возможно, но их существование недопустимо.

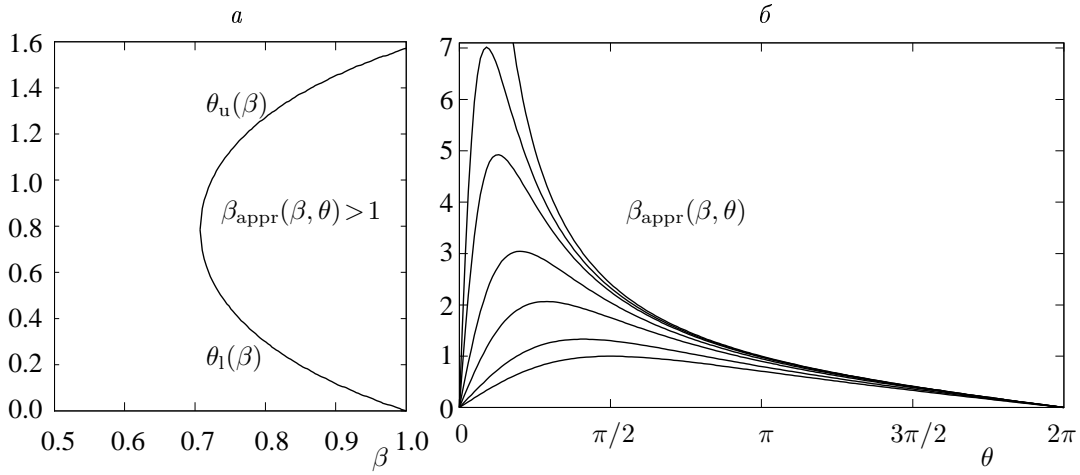


**Рис. 6.** Кажущееся сверхсветовое движение.

Тем не менее, в астрофизике наблюдаются сверхсветовые перемещения. Из активных ядер галактик (АЯГ) выбрасываются с большими, меньшими, но сравнимыми с  $c$  скоростями, джеты. Их отдельные сгустки (блобы) летят в некотором направлении и время от времени их наблюдают и измеряют угловое перемещение на небесной сфере. Если известно расстояние до галактики, то угловое расстояние можно перевести в линейное. При этом часто оказывается, что отношение линейного расстояния к промежутку времени между соответствующими, как говорят, эпохам наблюдений, то есть скорость перемещения блобов, превышает скорость света во много раз. Покажем, что и это явление только кажущееся.

Пусть некоторый источник излучения летит с скоростью  $\vec{v} = v\vec{e}$  и испускает фотоны в сторону наблюдателя, в направлении вектора  $\vec{l}$  (рис. 6). Угол между векторами  $\vec{e}$  и  $\vec{l}$  пусть будет  $\theta \leq \pi/2$ , так что  $\vec{e} \cdot \vec{l} = \cos \theta \geq 0$ . Пусть два наблюдения этого источника разделены временем  $t_0$ . За это время источник пройдет путь  $vt_0$  и окажется в точке, расположенной ближе к наблюдателю на расстояние  $vt_0 \cos \theta$ . Проекция пройденного источником пути на картинную плоскость равна  $vt_0 \sin \theta$ . Сигнал при втором наблюдении придет после первого через время  $t_0 - (v/c)t_0 \cos \theta$ , так как он вышел на  $t_0$  позже, но идти ему на  $(v/c)t_0 \cos \theta$  меньше. Таким образом, наблюдатель увидит второй сигнал на расстоянии от первого  $vt_0 \sin \theta$  через  $[1 - (v/c) \cos \theta]t_0$ , то есть для наблюдателя источник





**Рис. 7а.** Границы для угла  $\theta$  в зависимости от  $\beta$ .

**Рис. 7б.** Зависимость функции  $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$  от  $\theta$  при различных  $\beta$ .

переместился на небесной сфере с кажущейся скоростью

$$v_{\text{appr}} = v \frac{\sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (92)$$

Обозначим  $\beta = v/c$  и рассмотрим функцию

$$\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (93)$$

На концах промежутка изменения  $\theta$  ее значения  $\beta_{\text{appr}}(\beta, 0) = \beta_{\text{appr}}(\beta, \pi) = 0$ , в середине  $\beta_{\text{appr}}(\beta, \pi/2) = \beta$ . Максимальное значение этой функции достигается при  $\theta = \arccos(\beta)$  и равно  $\gamma\beta$ , где множитель Лоренца  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Неравенство  $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) \geq 1$  равносильно условию

$$\sin(\theta + \pi/4) \geq 1 \text{ или } \theta_1(\beta) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} - \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} = \theta_u(\beta), \quad (94)$$

поэтому сверхсветовые скорости могут наблюдаться только при  $\beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Границы по  $\theta$  в зависимости от  $\beta$  — повернутая и смещенная синусоида — изображены на рис. 7а. Графики функции  $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$  в зависимости от  $0 \leq \theta \leq \pi$  при  $\beta = 1/\sqrt{2}, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99$  и  $1.0$  приведены на рис. 7б. При  $\beta \rightarrow 1$  кривые приближаются к предельной кривой  $\beta_{\text{appr}}(1, \theta) = \text{ctg}(\theta/2)$ , однако все они исходят из начальной точки при  $\theta = 0$ , в то время как предельная кривая обращается в ней в бесконечность.

Таким образом, действительно, кажущееся перемещение источника в картинной плоскости может происходить со скоростью, большей световой, если сам источник летит с достаточно большой скоростью и под достаточно малым углом к линии наблюдения. Если наблюдается превышение источником скорости света в  $a$  раз, то можно получить связь между реальной скоростью источника и углом, под которым он летит к наблюдателю:

$$\beta = \frac{a}{a \cos \theta + \sin \theta}. \quad (95)$$

**3. Форма летящей сферы.** В этом пункте обсудим, как проявляется лоренцево сокращение.

Согласно формулам пункта 3 § 2 размер предмета в направлении его движения сокращается, а в перпендикулярном — остается неизменным. Например, рассмотрим движение сферы. Пусть радиус-вектор точки сферы в сопутствующей ей системе отсчета (это ее собственная система)  $\vec{r}'$ . Уравнение точек сферы в этой системе  $|\vec{r}'| = R$ . Если сфера движется по отношению к системе отсчета наблюдателя со скоростью  $\vec{V} = V\vec{e}$ , то ее уравнение в его системе будет другим. Действительно, в момент  $t'$  точке  $\vec{r}'$  соответствует четырехмерный вектор  $\underline{r}' = \{ct', \vec{r}'\}$ . В системе наблюдателя рассматриваемый вектор преобразуется в  $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$ . Выражение штрихованных координат через нештрихованные согласно преобразованию Лоренца задается формулой

$$\vec{r}' = \vec{r} - \Gamma V \vec{e} t + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e} = \vec{r} - (\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e} + \Gamma(\vec{e} \cdot \vec{r} - Vt) \vec{e}. \quad (96)$$

Второе выражение разбито на векторы, перпендикулярный и параллельный вектору  $\vec{e}$ . Возведя в квадрат это второе выражение и приравняв его квадрату  $\vec{r}'$ , получим уравнение летящей сферы:

$$[\vec{r} - (\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e}]^2 + \Gamma^2 (\vec{e} \cdot \vec{r} - Vt)^2 = R^2. \quad (97)$$

Очевидно, что такое уравнение описывает сфероид (эллипсоид вращения), у которого в перпендикулярном скорости движения сферы направлении полуоси равны ее радиусу  $R$ , а в направлении движения (и сферы и сфероида) полуось сокращена и равна  $R/\Gamma$ .

Более 50 лет после создания теории относительности считалось, что наблюдатель и увидит вместо сферы сфероид. По-видимому, так думал и Эйнштейн. Лишь в 1959 году было обращено внимание [98], что наблюдатель не измеряет размеры летящей сферы, как это описано в указанном выше пункте, а воспринимает ее через излучение, то есть как светящийся предмет. Изложение истории и интерпретация явления даны в статье [68].

Выясним, как видят сферу наблюдатели. Поскольку в перпендикулярном движению направлении сокращения расстояний не происходит, будем рассматривать точки сферы, лежащие в плоскости векторов  $\vec{e}$  и  $\vec{l}'$ , а значит и  $\vec{l}$ . Но прежде введем в указанной плоскости (назовем ее плоскостью аберрации) несколько базисов и установим между ними связи.

4. *Базисы в плоскости аберрации.* Введем в этой плоскости ортогональный базис, взяв в качестве одного из ортов вектор  $\vec{e}$ , а в качестве второго перпендикулярный ему

$$\vec{e}_\perp = \frac{\vec{l}' - \cos \theta' \vec{e}}{\sin \theta'} = \frac{\vec{l} - \cos \theta \vec{e}}{\sin \theta}. \quad (98)$$

Возможность двойного представления этого вектора доказывается с помощью формул аберрации. Орты, перпендикулярные векторам  $\vec{l}'$  и  $\vec{l}$ , также можно представить в виде разложений по введенному базису:

$$\vec{l}'_\perp = \sin \theta' \vec{e} - \cos \theta' \vec{e}_\perp, \quad \vec{l}_\perp = \sin \theta \vec{e} - \cos \theta \vec{e}_\perp. \quad (99)$$

С помощью формул аберрации (84) легко проверить, что справедливо тождество

$$\cos \theta' + \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' \sin \theta = \cos \theta. \quad (100)$$

Это тождество позволяет вывести соотношение между векторами:

$$\vec{l}'_\perp - \sin \theta' \vec{e} + \Gamma \sin \theta' \left( \vec{e} - \frac{V}{c} \sin \theta \vec{l} \right) = \vec{l}_\perp. \quad (101)$$

5. *Восприятие сферы наблюдателями.* Пусть сфера все время светится одинаково. Зафиксируем одну точку на сфере (точнее, на окружности — сечении сферы плоскостью аберрации)  $\vec{r}'_0 = R\vec{n}$ ,  $|\vec{n}| = 1$ . Посмотрим, отличаются ли восприятия летящей сферы двумя наблюдателями, один из которых летит вместе с ней, назовем его летящим, а другой в полете не участвует, назовем его сторонним.

Наблюдатель воспринимает в каждый момент те фотоны, которые дошли до него в этот момент, а значит вышли от сферы не одновременно, а в зависимости от места выхода. Можно принять, что все они выходят одновременно с фотоном, который вылетел бы из центра сферы, но проходят разные пути. Очевидно, что этому требованию удовлетворяет значение

$$ct'_0 = \vec{r}'_0 \cdot \vec{l}' = R\vec{n} \cdot \vec{l}'. \quad (102)$$

Обозначим

$$\vec{r}'_* = \vec{r}'_0 - c\vec{l}'t'_0 = R \left( \vec{n} - (\vec{l}' \cdot \vec{n})\vec{l}' \right). \quad (103)$$

Этот вектор ортогонален вектору  $\vec{l}'$  и, значит,

$$\vec{r}'_* = r'_* \vec{l}'_\perp. \quad (104)$$

Проекция  $r'_*$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Траектория фотонов, которые достигнут летящего наблюдателя, в системе, сопутствующей сфере, такова:

$$\vec{r}'_{\text{ph}} = R\vec{n} + c\vec{l}'(t'_{\text{ph}} - t'_0) = \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}} = r'_* \vec{l}'_\perp + c\vec{l}'t'_{\text{ph}}. \quad (105)$$

Момент прихода фотонов к наблюдателю получается при проецировании вектора (105) на направление их движения:

$$ct'_{\text{ph}} = \vec{l}' \cdot \vec{r}'_{\text{ph}} = R\vec{n} \cdot \vec{l}' + ct'_{\text{ph}} - ct'_0, \quad (106)$$

а наблюдаемая форма этого вектора — это проекция его на картинную плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{l}'$ , то есть

$$\vec{r}'_{\text{ph}} \cdot \vec{l}'_\perp = \vec{r}'_* \cdot \vec{l}'_\perp = r'_*. \quad (107)$$

Составив четырехмерный вектор для траектории фотонов в штрихованной системе

$$\underline{x}'_{\text{ph}} = \{ct'_{\text{ph}}, \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}}\} \quad (108)$$

и применив к нему преобразование Лоренца, получим соответствующий вектор в нештрихованной системе  $\underline{r}_{\text{ph}} = \{ct_{\text{ph}}, \vec{r}_{\text{ph}}\}$ , где

$$ct_{\text{ph}} = \Gamma \left( ct'_{\text{ph}} + \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{r}'_* + V(\vec{e} \cdot \vec{l}')t'_{\text{ph}} \right), \quad \vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}} + \Gamma V \vec{e} t'_{\text{ph}} + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_* + c\vec{e} \cdot \vec{l}'t'_{\text{ph}})\vec{e}. \quad (109)$$

Соотношение между временами в двух системах получается таким:

$$t'_{\text{ph}} = \frac{t_{\text{ph}} - \Gamma V \vec{e} \cdot \vec{r}'_*/c^2}{\Gamma(1 + V \cos \theta/c)}, \quad (110)$$

так что траектория фотонов в нештрихованной системе в зависимости от времени в той же системе дается выражением

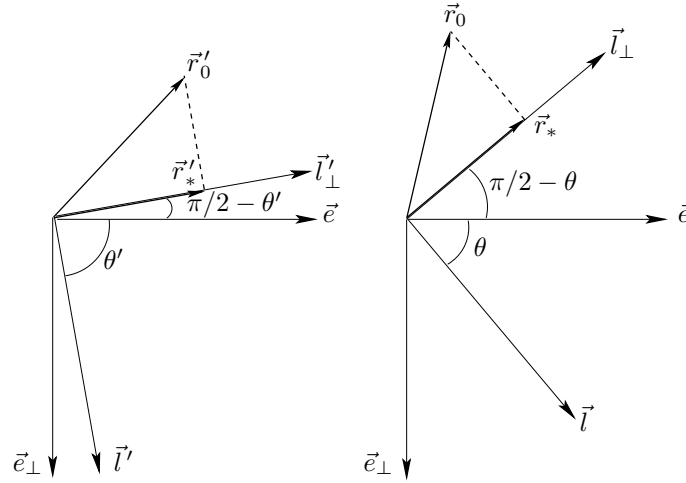
$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}'_* + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_*)\vec{e} + c\vec{l}' \left( t_{\text{ph}} - \Gamma \frac{V}{c^2} \vec{e} \cdot \vec{r}'_* \right), \quad (111)$$

при выводе которого использовано соотношение (80) между векторами  $\vec{l}$  и  $\vec{l}'$ . Записав вектор (111) в виде

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}'_* + c\vec{l}'t_{\text{ph}}, \quad (112)$$

для вектора  $\vec{r}'_*$  получим с помощью соотношения (101)

$$\vec{r}'_* = \vec{r}'_* + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_*)\vec{e} - c\vec{l}'\Gamma \frac{V}{c^2} \vec{e} \cdot \vec{r}'_* = r'_* \left[ \vec{l}'_{\perp} + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{e} - \Gamma \frac{V}{c} (\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{l} \right] = r'_* \vec{l}'_{\perp}. \quad (113)$$



**Рис. 8.** Поворот радиуса летящей сферы.

Таким образом, сторонний наблюдатель увидит проекцию определенного радиуса летящей сферы точно такого же размера, что и наблюдающий за неподвижной сферой. При этом более удаленные части сферы пошлют свой сигнал раньше, а именно, точка на радиусе, составляющем определенный угол с вектором наблюдения в сопутствующей сфере системе, будет восприниматься сторонним наблюдателем как точка на радиусе с тем же углом, но по отношению к вектору его наблюдения. Сторонний наблюдатель увидит точно такую же картину, что и летящий вместе со сферой. Вся картина, то есть сфера с исходящими от нее лучами, просто повернется на угол между векторами  $\vec{l}'$  и  $\vec{l}$ , то есть на угол  $\theta' - \theta$  в соответствии с аберрацией. Это явление называется поворот Терреля.

Рис. 8 отражает поворот радиуса сферы. Приняты значения  $\theta' = 80^\circ$ ,  $V/c = 0.528$ , так что поворот линий наблюдения произошел на угол  $\theta' - \theta = 30^\circ$ . В качестве поворачивающихся треугольников взяты египетский со сторонами 3, 4 и 5. На рис. 9 изображено, как поворачивается сфера с теми же параметрами поворота для летящего вместе с ней и неподвижного наблюдателей.

#### Задачи к главе

**Задача.** Вывести формулы аберрации из формул, описывающих эффект Доплера.

**Решение.** Из взаимно обратных формул (72) и (73) вытекает соотношение

$$(1 - V \cos \theta/c)(1 + V \cos \theta'/c) = 1/\Gamma^2 = 1 - V^2/c^2 \quad (114)$$

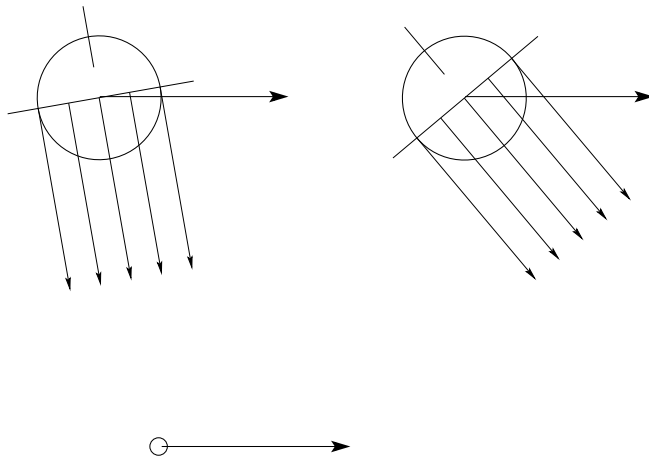


Рис. 9. Поворот летящей сферы.

или

$$\cos \theta' - \cos \theta + V(1 - \cos \theta' \cos \theta)/c = 0. \quad (115)$$

Отсюда легко вывести взаимно обратные соотношения для косинусов, а затем и для синусов (84).

Задача. Вывести формулу аберрации (80) из формулы сложения скоростей.

Решение. Положив в формуле (21)  $\vec{v} = c\vec{l}$  и  $\vec{v}' = c\vec{l}'$ , получим выражение

$$\vec{l} = \frac{\vec{l}' + V\vec{e}/c + (1 - 1/\Gamma)\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{l}')}{1 + V\vec{e} \cdot \vec{l}'/c}, \quad (116)$$

которое после небольших преобразований приводится к (80).

Задача. Доказать равенства (100) и (101).

Решение. Заменяя все штрихованные функции их выражениями через нештрихованные, получим первое равенство:

$$\frac{\cos \theta - V/c}{1 - V \cos \theta/c} + \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta \frac{\sin \theta}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)} = \frac{\cos \theta - V(1 - \sin^2 \theta)/c}{1 - V \cos \theta} = \cos \theta. \quad (117)$$

Второе доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{l}'_{\perp} + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{e} - \Gamma \frac{V}{c}(\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{l} &= \sin \theta' \vec{e} - \cos \theta' \vec{e}_{\perp} + (\Gamma - 1) \sin \theta' \vec{e} - \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' (\cos \theta \vec{e} + \sin \theta \vec{e}_{\perp}) = \\ &= \Gamma \sin \theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right) \vec{e} - \vec{e}_{\perp} \left(\cos \theta' + \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' \sin \theta\right) = \sin \theta \vec{e} - \cos \theta \vec{e}_{\perp} = \vec{l}_{\perp}. \end{aligned} \quad (118)$$

Задача. Два блоба с инфрасветовыми скоростями летят вдоль одной прямой. Первоначальное расстояние между ними  $d$ . Найти выражения для относительных скоростей бловов и закон изменения расстояния между ними.

Решение. Представим скорость каждого блова в виде

$$\frac{v}{c} = 1 - \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v/c} \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (119)$$

Тогда относительная скорость при движении навстречу согласно (64)

$$v_{12} = c \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2\gamma_1 \gamma_2} = c, \quad (120)$$

а при движении в одном направлении

$$v_{12} = c \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \quad (121)$$

Задача. Космический корабль массой в 1 тонну разгоняется до скорости  $V$ . Какую энергию требуется затратить на это?

Задача из Рыбицкого и Лайтмана. Тело массой в 70 кг разгоняется за счет приложенного к нему постоянного ускорения  $10 \text{ м/с}^2$  в течение 10 лет. Какая при этом будет затрачена энергия? Если разогнанное тело повернет и еще 10 лет будет возвращаться с тем же ускорением, то какой выигрыш во времени оно получит?

## Глава II. Классическая теория излучения

### § 1. Уравнения Максвелла и их следствия

1. *Уравнения Максвелла.* Приведем уравнения Максвелла для случая, когда среда немагнитная, так что векторы магнитной напряженности  $\vec{H}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  совпадают. Пара уравнений, не содержащих зарядов и токов, имеет вид [29]

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Первое из них отражает отсутствие магнитных зарядов, второе является выражением закона Фарадея, по которому изменение магнитной напряженности порождает электрическое поле.

В то же время принимаем, что среда может обладать диэлектрическими свойствами, т. е. задается диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$ , так что вторая пара уравнений Максвелла записывается так [29]:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2)$$

Здесь  $\rho(\vec{r}, t)$  — плотность заряда, а  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  — плотность тока. Эти величины считаются заданными и удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3)$$

которое означает, что всякое изменение плотности заряда сопровождается возникновением тока, т. е. заряд может только перетекать из одного места в пространстве в другое. Если взять дивергенцию от второго уравнения в (2) и в результат подставить первое, то убедимся, что уравнения Максвелла согласуются с уравнением неразрывности.

Уравнений Максвелла восемь для шести искомым величин: двух векторов с тремя координатами каждый. Такое кажущееся несоответствие объясняется теоремой, доказываемой, например, в книге П.К.Рашевского [48] и утверждающей, что вектор с точностью до постоянного слагаемого можно восстановить по его ротору и дивергенции.

2. *Энергетическое соотношение.* Умножим каждое из уравнений с ротором напряженности на вектор другой напряженности и вычтем получающиеся соотношения. Затем воспользуемся векторным тождеством

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}(\operatorname{rot} \vec{E}) - \vec{E}(\operatorname{rot} \vec{B}). \quad (4)$$

Тогда, если  $\varepsilon$  не зависит от времени, получится следствие уравнений Максвелла

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{E} \vec{j}, \quad (5)$$

где плотность энергии и вектор потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$W = \frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \vec{H}^2}{4\pi}, \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (6)$$

Левая часть равенства (5) имеет вид уравнения неразрывности, но в правой стоит не нуль. Произведение  $\vec{E} \vec{j}$  есть работа электромагнитного поля над зарядами, создающими внешний ток.

3. *Потенциалы.* Если среда однородна и стационарна, т. е.  $\varepsilon$  не зависит ни от координат, ни от времени, то можно вместо напряженностей ввести новые искомые функции, а именно: скалярный  $\varphi$  и векторный  $\vec{A}$  потенциалы. Через них напряженности выражаются следующим образом:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (7)$$

С такими определениями уравнения (1) удовлетворяются тождественно.

Выбор потенциалов не является однозначным. Неоднозначность потенциалов связана не только с тем, что характеристики поля выражаются через их производные и, следовательно, к потенциалам можно добавлять любые константы. Легко проверить, что выражения (7) не изменятся, если потенциалы заменить на штрихованные, связанные с исходными добавлением градиентов некоторой функции:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (8)$$

Это свойство электромагнитного поля называется градиентной или калибровочной (gauge) инвариантностью. Выбор определенной функции  $\chi$  и тем самым определенных потенциалов называется калибровкой.

Покажем, что можно выбрать такую калибровку, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (9)$$

Действительно, пусть это соотношение для штрихованных потенциалов не выполняется, так что

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' = b(\vec{r}, t) \neq 0. \quad (10)$$

Подставив выражения (8) в (10) и выбрав такую функцию  $\chi$ , чтобы

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi = b(\vec{r}, t), \quad (11)$$

убедимся, что для нештрихованных потенциалов соотношение (9) выполняется. Нам нужна всего лишь одна функция  $\chi$ . Так как при любых функциях  $b(\vec{r}, t)$  можно найти функцию, удовлетворяющую уравнению (11), то к соотношению можно перейти всегда. Калибровка потенциалов соотношением (9) называется калибровкой Лоренца, а само это соотношение условием Лоренца.

Не следует думать, что калибровка (9) полностью определяет потенциалы. Напряженности не изменятся, если к функции  $\chi$  добавить любое решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (11).

4. *Уравнения для потенциалов.* Перейдем теперь к решению двух оставшихся уравнений. Подставляя в них выражения (7) и принимая во внимание соотношение (9), находим, что потенциалы определяются уравнениями

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (13)$$

Эта величина имеет размерность скорости, она равна скорости света в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Введем также оператор

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (14)$$

называемый волновым оператором или оператором Даламбера. Тогда уравнения для потенциалов запишутся коротко

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (15)$$

Итак, уравнения Максвелла свелись к решению четырех однотипных уравнений для четырех потенциалов, подчиненных дополнительному условию Лоренца (9).

Заметим, что если под знаком оператора Даламбера применить к потенциалам условие Лоренца, то справа получится выражение, пропорциональное левой части уравнения неразрывности. Поэтому можно считать, что условие Лоренца является отражением этого уравнения.

5. *Запаздывающие потенциалы.* Приведем выражения для частных решений уравнений вида (15), которые называются неоднородными волновыми уравнениями. Поскольку они имеют один и тот же вид

$$\square \varphi = 4\pi f(\vec{r}, t), \quad (16)$$

то и решения их можно записать сразу для всех. Это решение следующее:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{f(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (17)$$

Поясним приведенную формулу, считая  $f$  плотностью заряда. Произведение плотности заряда на элемент объема равно заряду этого объема. Так как элемент объема бесконечно мал, его можно считать точечным. Потенциал точечного заряда равен величине этого заряда, деленной на расстояние от него до точки измерения. Надо сложить потенциалы от всех зарядов, т. е. взять интеграл по их распределению. Особого пояснения требует лишь момент времени  $t'$ , в который надо вычислять плотность заряда, чтобы наблюдатель смог почувствовать

его влияние в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ . Будем называть  $t'$  моментом влияния. Этот момент определяется равенством

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = v(t - t'). \quad (18)$$

Равенство (18) интерпретируется следующим образом. Чтобы плотность заряда в точке  $\vec{r}'$  повлияла на значение потенциала в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$ , необходимо, чтобы сигнал от точки  $\vec{r}'$ , движущийся со скоростью  $v$ , вышел из этой точки в момент времени  $t'$ . Такие решения волнового уравнения называются запаздывающими потенциалами.

6. *Векторы электромагнитного поля.* Пусть электромагнитное поле создается и распространяется в свободном пространстве. В этом случае описывающим его величинам и соотношениям можно придать релятивистски ковариантный вид. Начнем с плотности заряда и тока.

Исходя из того обстоятельства, что количество заряда является скалярной величиной, напомним цепочку равенств

$$\rho d^3r = \frac{\rho}{\gamma} \gamma d^3r = \frac{\rho}{\gamma} d^3r_0. \quad (19)$$

Здесь  $\rho$  — плотность заряда,  $\gamma$  — лоренцевский множитель, связывающий систему отсчета, в которой заряд покоится, с движущейся по отношению к ней со скоростью  $v = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$ . Так как стоящий слева заряд элементарного объема и множитель справа  $d^3r_0$  — собственный объем заряда — являются релятивистскими инвариантами, то скаляром является и отношение  $\rho/\gamma = \rho_0$ , представляющее собой плотность заряда в его собственной системе отсчета.

Если умножить эту скалярную величину на четырехмерный вектор скорости элементарного заряда, то получится снова четырехмерный вектор, называемый вектором плотности заряда-тока или короче вектором тока:

$$\underline{j} = \frac{\rho}{\gamma} \{c\gamma, \vec{v}\gamma\} = \{c\rho, \vec{j}\}. \quad (20)$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов градиента и тока

$$\underline{\nabla} \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \quad (21)$$

представляет собой уравнение неразрывности.

Уравнения, которым удовлетворяют потенциалы

$$\square \varphi = 4\pi\rho, \quad \square \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (22)$$

являются временной и пространственной составляющими одного четырехмерного векторного

$$\underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}. \quad (23)$$

Поскольку справа стоит четырехмерный вектор, а оператор Даламбера — скаляр, то и потенциалы образуют вектор

$$\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}. \quad (24)$$

Скалярное произведение градиента на этот вектор, равное нулю:

$$\underline{\nabla} \underline{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad (25)$$

отражает условие Лоренца.

Заметим, что компоненты трехмерных векторов напряженностей электрического и магнитного поля не составляют четырехмерных векторов, а все вместе являются элементами тензора, поэтому их преобразование более сложно. При помощи этого тензора и уравнения Максвелла могут быть записаны в релятивистски ковариантном виде (см. [29]).

## § 2. Излучение точечного заряда

1. *Постановка задачи.* Пусть точечный заряд движется в свободном пространстве. Его радиус-вектор в некоторой системе отсчета является известной функцией времени, определенного в этой системе:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(t). \quad (26)$$

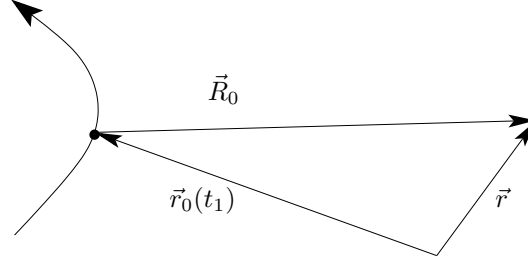
Тогда плотности заряда и тока определяются формулами

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{r}'_0(t). \quad (27)$$

Движущийся заряд создает вокруг себя электромагнитное поле. Найдем его.

Начнем с определения потенциалов.

Пусть в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  находится наблюдатель, который измеряет потенциалы в момент времени  $t$ . Величины  $\vec{r}$  и  $t$  считаем фиксированными.



**Рис. 1.** Геометрия излучения заряда.

Потенциалы определяются неоднородными волновыми уравнениями (15), которые при  $\varepsilon = 1$  принимают вид

$$\square\varphi = 4\pi\rho, \quad \square\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (28)$$

Их решения — запаздывающие потенциалы, определяемые формулами вида (17):

$$\varphi = \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (29)$$

Здесь время  $t_1$  — время влияния, которое меньше времени наблюдения  $t$ , так как сигнал от источника поля до наблюдателя должен успеть дойти со скоростью распространения, равной скорости света. Таким образом, в (29) момент времени  $t_1$  определяется соотношением

$$c(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (30)$$

Эти общие формулы надо применить к случаю точечного заряда, т. е. подставить туда выражения (27). Тогда для скалярного потенциала получится

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{d^3r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (31)$$

Поскольку под знаком интеграла стоит  $\delta$ -функция, то фактически в каждый момент времени  $t$  интеграл должен браться по одной точке, а соответствующий момент влияния определяется из уравнения

$$c(t - t_1^0) = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (32)$$

Поэтому можно вынести значение знаменателя в (31) в этой точке и написать

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0(\vec{r}, t_1^0)} \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} = \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3r_1. \quad (33)$$

где введен вектор, соединяющий положение заряда в момент влияния с положением наблюдателя (см. рис. 1):

$$\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\vec{r}, t_1^0) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0), \quad R_0 = R_0(\vec{r}, t_1^0) = |\vec{R}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (34)$$

Точно так же в интеграле для векторного потенциала можно вынести два множителя и получить

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0} \vec{r}'_0(t_1^0) \mathcal{I}. \quad (35)$$

Таким образом, дело сводится к вычислению одного интеграла от  $\delta$ -функции. Однако, этот интеграл равен единице, только если величина  $\vec{r}'_0$  постоянна, т. е. для неподвижного заряда. В случае движущегося заряда это не так.



2. *Вычисление потенциалов.* Нам надо вычислить интеграл в (33) при условии (32). Ввиду важности результата и нетривиальности его получения мы дадим несколько способов вычисления указанного интеграла.

1) Непосредственное вычисление. Сделаем замену переменных интегрирования

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) = \vec{r}_2. \quad (36)$$

Далее надо найти якобиан преобразования. После вычисления якобиана интеграл от  $\delta$ -функции берется просто.

2) Релятивистские соображения. Релятивистские выражения для потенциалов можно получить, исходя из так называемых релятивистских соображений, а именно, из двух следующих требований. Во-первых, скалярный и векторный потенциалы вместе должны составлять четырехмерный вектор. Во-вторых, в пределе неподвижного заряда должен получаться известный результат:

$$\varphi = \frac{e}{R_0}, \quad \vec{A} = 0. \quad (37)$$

Искомые выражения надо сконструировать из имеющихся четырехмерных векторов. Таких векторов у нас два. Это вектор перемещения точки влияния заряда

$$\underline{R}_0 = \{c(t - t_1^0), \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)\} = \{R_0, \vec{R}_0\} \quad (38)$$

и вектор скорости заряда

$$\underline{v} = c\{\gamma_0, \gamma_0 \vec{\beta}\}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}. \quad (39)$$

Первый вектор нулевой, так как он описывает распространение сигнала, которое происходит со скоростью света. Второй вектор времениподобен, как и должно быть для вектора скорости, так как

$$\gamma_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (40)$$

Очевидно, что четырехмерный вектор потенциалов

$$\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\} \quad (41)$$

должен быть пропорционален вектору скорости, ибо у обоих этих векторов в случае неподвижного заряда пространственные составляющие обращаются в нули. В знаменатель же надо поместить выражение, обращающееся в этом же случае в  $R_0$ . Таким выражением является скалярное произведение векторов  $\underline{v}$  и  $\underline{R}_0$ . Окончательно получаем

$$\underline{A} = \frac{e}{\underline{v} \underline{R}_0} \underline{v} = \frac{e}{s} \{1, \vec{\beta}\}, \quad s = R_0 - \vec{\beta} \vec{R}_0. \quad (42)$$

3) Наглядное рассуждение. Наконец, последний способ вывода — наименее формальный из всех. Уравнение (30) задает в каждый момент времени  $t_1$  сферу радиусом  $c(t - t_1)$  с центром в точке  $\vec{r}$ . Если сфера проходит через заряд, эта точка заряда вносит вклад в интеграл (33). Сфера влияния сходится к наблюдателю со скоростью света, а заряд движется с меньшей скоростью  $v$ . На рис. 2 показаны положения сферы влияния и заряда до и после их пересечения. Рисунок допускает движение заряда в обе стороны.

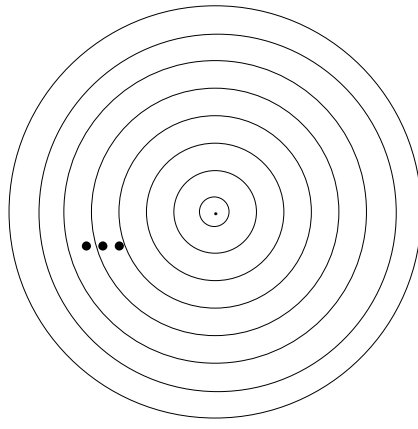
Для наглядности вывода откажемся от точечности заряда. Пусть заряд имеет постоянное поперечное сечение и длину  $a$ , а скорость его направлена прямо на наблюдателя. В какой-то момент сфера догонит заряд, т. е. коснется его заднего сечения, а потом перегонит его, т. е. коснется переднего его сечения (рис. 3). Вклад в интеграл заряд будет давать только в те моменты, когда сфера его пересекает. Если бы заряд был неподвижен, этот промежуток времени был бы равен  $a/c$ . Из-за движения заряда в ту же сторону, что и сфера, промежуток времени влияния увеличивается. Обозначим расстояние, на котором происходит влияние заряда, через  $b$ . Тогда за одно и то же время заряд проходит расстояние  $b - a$ , а сфера  $b$ . Поделив эти расстояния на скорости и приравняв результаты, получим

$$\frac{b}{c} = \frac{b - a}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (43)$$

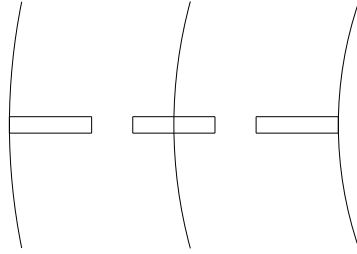
Это как раз тот дополнительный множитель, на который отличается величина интеграла в (33) от единицы, так как  $v$  — это проекция скорости заряда на направление на наблюдателя.

Аналогично рассматривается противоположный случай, когда заряд движется от наблюдателя навстречу сфере (рис. 4). Тогда получаются соотношения

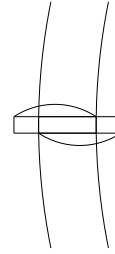
$$\frac{b}{c} = \frac{a - b}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + v/c}. \quad (44)$$



**Рис. 2.** Пересечение заряда сферой влияния.



**Рис. 3.** Движение заряда и сферы в одном направлении.



**Рис. 4.** Движение заряда навстречу сфере.

Здесь  $v$  — проекция скорости заряда на направление от наблюдателя, так что формула фактически та же.

Мы считали заряд неточечным. Однако поправочный множитель не зависит от  $a$  и остается тем же при  $a \rightarrow 0$ .

Итак, потенциалы точечного движущегося заряда, называемые обычно потенциалами Лиенара—Вихерта, определяются формулами (42) или подробнее

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{s}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{r}'_0(t_1)}{c s}, \quad s = R_0(\vec{r}, t_1) - \vec{r}'_0(t_1) \vec{R}_0(\vec{r}, t_1)/c. \quad (45)$$

Здесь для краткости у аргумента  $t_1^0$ , определяемого (32), опущен нолик, т. е.

$$c(t - t_1) = R_0(\vec{r}, t_1). \quad (46)$$

После получения формул для потенциалов можно найти напряженности электрического и магнитного полей. Эти напряженности состоят каждая из двух слагаемых, назовем их для краткости первые и вторые. Первые не содержат ускорения заряда, в то время как вторые, напротив, пропорциональны величине ускорения. Первые убывают с расстоянием от заряда  $R_0$  как  $1/R_0^2$ , вторые — как  $1/R_0$ . Ясно, что только эти вторые слагаемые составляют электромагнитное поле на больших расстояниях. Именно они определяют то, что называется излучением, т. е. электромагнитные волны, оторвавшиеся от своих источников и уносящие излучаемую ими энергию и импульс. Поскольку нас интересует излучение заряда, найдем выражения для потенциалов и напряженностей на больших расстояниях от него.

**3. Потенциалы точечного заряда на больших расстояниях.** Пусть заряд движется в некоторой ограниченной области размером  $a$ . Выберем в этой области фиксированную точку с радиусом-вектором  $\vec{r}_c$ . Вектор, идущий из этой точки к наблюдателю, обозначим

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_c. \quad (47)$$

Введем вектор смещения заряда от фиксированной точки

$$\vec{x} = \vec{x}(t_1) = \vec{r}_0 - \vec{r}_c = \vec{R}_0 - \vec{R}. \quad (48)$$

Ясно, что  $|\vec{x}| \leq a$ ,  $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{x}$  и  $\vec{\beta} = \frac{1}{c} \vec{r}'_0(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}'(t_1)$ ,  $\vec{\beta}'(t_1) = \frac{1}{c} \vec{r}''_0(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}''(t_1) = \frac{1}{c} \vec{w}$ , где  $\vec{w} = \vec{w}(t_1)$  — вектор ускорения заряда.

Обозначим единичный вектор направления от той же точки к наблюдателю через

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}. \quad (49)$$

Будем считать, что размер области мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя, т. е.  $|\vec{x}| \leq a \ll \vec{R}$ . Это и означает, что наблюдатель находится на большом расстоянии от заряда. Тогда

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \vec{x}^2 - 2\vec{R}\vec{x}} = R\sqrt{1 - 2(\vec{x}/R)\vec{n} + (\vec{x}/R)^2} \approx R[1 - (\vec{x}/R)\vec{n}] = R - \vec{x}\vec{n}. \quad (50)$$

Поэтому

$$\frac{\vec{R}_0}{R_0} = \frac{\vec{R} - \vec{x}}{R_0} \approx \vec{n}. \quad (51)$$

Можно ввести запаздывающее время  $T$ , не зависящее от положения заряда:

$$R = c(t - T). \quad (52)$$

Тогда из (46), (50) и (52) следует, что на далеких расстояниях

$$t_1 - \frac{1}{c}\vec{n}\vec{x} = T = t - \frac{R}{c}. \quad (53)$$

Время  $T$  течет так же, как и  $t$ , только со смещением на  $R/c$ . Из (53) вытекают как связь между временами  $t$  и  $t_1$ , так и выражение для градиента  $t_1$ . Действительно,

$$dt_1 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) = dt, \quad \vec{\nabla}t_1 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) = -\frac{\vec{n}}{c}, \quad (54)$$

откуда

$$\frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{\beta}}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{n}\vec{\beta}, \quad \vec{\nabla}t_1 = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{\beta}}. \quad (55)$$

При выводе формул для составляющих напряженностей, определяющих излучение, при нахождении электромагнитных величин достаточно ограничиться главными слагаемыми, убывающими как  $1/R_0$  или, что то же самое, как  $1/R$ . Поэтому все слагаемые, убывающие быстрее, мы будем отбрасывать. В частности, в формулах (42) для потенциалов можно заменить  $\vec{R}_0$  на  $\vec{R}$  и записать эти формулы в виде

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R - \vec{R}\vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A} = \frac{e\vec{\beta}(t_1)}{R - \vec{R}\vec{\beta}(t_1)} \quad (56)$$

или

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A}(t_1) = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}(t_1)}{1 - \vec{n}\vec{\beta}(t_1)}. \quad (57)$$

Теперь время  $t_1$  в выражения для потенциалов входит только через аргумент скорости  $\vec{\beta}$ . Заметим, что потенциалы связаны соотношением

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} + \vec{n}\vec{A}(t_1). \quad (58)$$

Еще одно упрощение заключается в следующем. При нахождении градиента не нужно дифференцировать по координатам непосредственно, так как такое дифференцирование всегда увеличивает скорость убывания дифференцируемой функции с  $R$ . Действительно,

$$\vec{\nabla}r^\alpha = \alpha \vec{r}r^{\alpha-1}. \quad (59)$$

Следовательно, при вычислении градиента достаточно находить производные по координатам только через время  $t_1$ , т. е. можно принять

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \frac{\partial}{\partial t_1}. \quad (60)$$

Приведенные упрощенные формулы взятия производных позволяют вывести еще некоторые соотношения между характеристиками поля. Например, комбинация (60) и (55) дает

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (61)$$

так что

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (62)$$

Таким образом, достаточно найти производные от потенциалов по времени:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{n}\vec{\beta}'}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}, \quad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}'(1-\vec{n}\vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}')}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (63)$$

С помощью этих соотношений легко проверить справедливость условия Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (64)$$

Легко проверить, что потенциалы в этом приближении, как и точные, составляют компоненты четырехмерного вектора:

$$\underline{A} = \frac{e}{R\beta} \underline{\beta} = \frac{e}{R} \frac{\{1, \vec{\beta}\}}{1-\vec{n}\vec{\beta}}, \quad \underline{R} = \{R, \vec{R}\}, \quad \underline{\beta} = \{1, \vec{\beta}\}/\sqrt{1-\beta^2}. \quad (65)$$

4. *Поле на больших расстояниях от источника.* Ввиду указанных упрощений не только потенциалы, но и напряженности на больших расстояниях находить довольно просто. Имеем

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{A} + \vec{n}\varphi) = \frac{e}{Rc} \frac{-\vec{\beta}'(1-\vec{n}\vec{\beta}) + (\vec{n}-\vec{\beta})\vec{n}\vec{\beta}'}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (66)$$

Аналогично

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{e}{Rc} \frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\vec{\beta}'(1-\vec{n}\vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}')}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (67)$$

Легко проверить, что формулу (66) можно переписать в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{e}{R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n}-\vec{\beta}) \times \vec{\beta}']}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (68)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}. \quad (69)$$

Таким образом, три вектора  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны, т. е. на далеких расстояниях поле движущегося с ускорением точечного заряда представляет собой поперечную сферическую волну, близкую к плоской.

Заметим, что, как легко убедиться, формулы для напряженностей могут быть записаны в таком виде, что в них будет входить только производная по времени наблюдателя от векторного потенциала:

$$\vec{E} = \vec{n} \times \left( \frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right), \quad \vec{H} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}. \quad (70)$$

Такая форма этих выражений полезна при нахождении преобразований Фурье от напряженностей.

Найдем энергетические характеристики поля. Электрическая и магнитная части плотности энергии, как легко видеть, равны. Поэтому плотность энергии электромагнитного поля равна  $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$ . Поток энергии, т. е. вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{E^2}{4\pi} c\vec{n} = W c\vec{n}. \quad (71)$$

Таким образом, вектор потока энергии равен произведению плотности энергии на скорость распространения поля, т. е. энергия только перетекает. Поэтому, как легко проверить, выполняется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\vec{S}}{\partial t} = 0. \quad (72)$$

### § 3. Излучение медленных и быстрых зарядов

1. *Дипольное приближение.* Сделаем еще одно предположение: пусть скорость заряда мала по сравнению со скоростью света, т. е. заряд нерелятивистский. Обозначим модуль его скорости через  $v$ . Тогда  $v \ll c$ . Это неравенство можно выразить в несколько другой форме. Заряд проходит область размером  $a$  за время  $a/v$ . Его излучение имеет примерно такой же период и, следовательно, частоту  $\nu = v/c$  и длину волны  $\lambda = c/\nu \sim ca/v$ . Так как  $v \ll c$ , то  $\lambda \gg a$ . Таким образом, медленный заряд излучает на длине волны, значительно большей размера той области, в которой он движется.

Из соотношения (53), связывающего запаздывающие времена  $t_1$  и  $T$ , видно, что разность между ними в случае медленного заряда значительно меньше, чем время, за которое заряд пересекает область:  $a/c \ll a/v$ . Поэтому изменение скорости заряда  $\dot{x}'$  за это время относительно мало и различием между временами  $T$  и  $t_1$  можно пренебречь. В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \dot{x}'(t_1)/c} = \frac{e}{R} \left[ 1 + \frac{\vec{n} \cdot \dot{x}}{c} \right]. \quad (73)$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{e}{Rc} \frac{\dot{x}'}{1 - \vec{n} \cdot \dot{x}'/c} = \frac{e}{Rc} \dot{x}(T) \quad (74)$$

Тогда

$$\vec{H} = \frac{e}{Rc^2} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}. \quad (75)$$

Найдем энергетические величины. Плотность энергии поля равна

$$W = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2 = \frac{1}{c^4 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2, \quad (76)$$

а вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = W c \vec{n}. \quad (77)$$

Вектор Пойнтинга — это вектор потока энергии, т. е. величина, рассчитанная на единицу площади. Если находить количество энергии, которое идет в единицу телесного угла, то надо модуль (77) умножить на  $r^2$ , т. е. это количество равно

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \Theta, \quad (78)$$

где  $\Theta$  — угол между дипольным моментом и направлением на наблюдателя. Поскольку вторая производная по времени от дипольного момента равна произведению величины заряда на его ускорение, то формулу (78) можно переписать так:

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \sin^2 \Theta. \quad (79)$$

Равенство (79) называется формулой Лармора. Распределение излучения по направлениям таково, что прямо вперед по второй производной от дипольного момента и в обратном направлении оно отсутствует. Во всех других направлениях излучение примерно одинаково, максимально оно в перпендикулярном к ускорению направлении.

Легко найти полное излучение, т. е. идущее во все стороны. Для этого возьмем интеграл по всем направлениям, выбрав в качестве полярного угла  $\Theta$  и приняв во внимание осевую симметрию излучения:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \mathcal{W}(\Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \sin^2 \Theta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2. \quad (80)$$

Последняя формула дает полную мощность излучения заряда в дипольном приближении, т. е. количество энергии, которое он излучает в единицу времени во всех направлениях. Ее тоже называют формулой Лармора.

Если в разложениях по отношению скорости заряда к скорости света учесть слагаемые более высокого порядка малости, то добавятся так называемые мультипольные составляющие полей (квадрупольные, магнитные дипольные и т. д.) Мы ограничимся дипольным приближением.

2. *Полное излучение быстрого заряда.* Самый простой способ найти полное излучение релятивистского заряда — это использовать релятивистские соображения, аналогичные тем, с помощью которых были получены формулы для потенциалов точечного движущегося заряда.

Должны выполняться два требования по отношению к искомым формулам. Они должны быть релятивистски ковариантны и оставаться правильными при переходе к нерелятивистскому пределу. Поэтому напомним два столбца формул, нерелятивистские и релятивистские, заполняя сначала левый сверху вниз, а затем правый снизу вверх.

$$\begin{array}{l|l}
\text{нерелятив.} & \text{релятивист.} \\
\mathbf{d}\underline{x} = \{c dt, 0\}, & \mathbf{d}\underline{x} = \{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\}, \\
\mathbf{d}\underline{P} = \{dP_0, 0\} = I\{dt/c, 0\} = & \mathbf{d}\underline{P} = \{dP_0, \vec{P}\} = I\{dt_1/c, d\vec{x}(t_1)/c^2\} = \\
= (I/c^2)\{c dt, 0\} = (I/c^2)\mathbf{d}\underline{x}, & = (I/c^2)\{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\} = (I/c^2)\mathbf{d}\underline{x}(t_1), \\
\vec{w}^2 = w^2, & \vec{w}^2 = \gamma^6[(\vec{\beta} \times \vec{w})^2 - w^2], \\
I = (2/3)(e^2/c^3)w^2, & I = (2/3)(e^2/c^3)(-\underline{w}^2).
\end{array} \quad (81)$$

В формулах правого столбца используется время  $t_1$ , так как излучение относится к заряду.

При определении излучения нерелятивистского заряда учитывается только излучаемая им энергия и мощность его полного (во все стороны) излучения дается формулой Лармора. Однако время и энергия представляют лишь нулевые компоненты четырехмерных векторов положения и энергии-импульса. При нерелятивистских (малых) скоростях заряда составляющими, отличными от времени и энергии, пренебрегают (в наших формулах в левом столбце они приняты равными нулю). При релятивистском подходе к описанию процесса необходимо рассматривать не отдельно энергию и время, а все компоненты, точнее их дифференциалы. В релятивистском случае пространственные составляющие векторов сравнимы по величине с временными.

Из полученных формул следует, что релятивистский заряд излучает не только энергию, но и заметный импульс, т.е. оторвавшееся от него электромагнитное поле уносит с собой и энергию и импульс. Сферическая расходящаяся волна расширяется со скоростью света, но кроме того ее центр смещается со сравнимой по величине скоростью.

Физическая величина — мощность излучения  $I$  (точнее  $I/c^2$ ) — оказывается коэффициентом пропорциональности между бесконечно малыми векторами энергии-импульса и смещения заряда. Квадрат ускорения естественно заменяется на квадрат четырехмерного ускорения. Знак минус берется потому, что четырехмерный вектор ускорения пространственно подобен и в нерелятивистском пределе его квадрат согласно формуле (56) переходит в  $-w^2$ . Воспользовавшись этой формулой, можно написать

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2]. \quad (82)$$

3. *Угловое распределение.* Запишем формулу для напряженности электрической составляющей излучаемого зарядом поля

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (83)$$

Количество лучистой энергии, излучаемое в направлении  $\vec{n}$  в телесном угле  $d^2n$  в единицу времени, равно

$$dI_*(\vec{n}) = \mathcal{W}_* d^2n = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d^2n = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]|^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^6} d^2n. \quad (84)$$

Чтобы отсюда получить выражение для полного излучения, найденного в пункте 1, необходимо проинтегрировать по всем направлениям на наблюдателя  $\vec{n}$ , закрепив при этом вектор скорости  $\vec{\beta}(t_1)$ , а значит момент времени  $t_1$ . В разных направлениях  $\vec{n}$  этому времени будут соответствовать различные моменты времени наблюдения  $t$  на одном и том же расстоянии  $R$  или разные расстояния  $R$  при одном  $t$ . Если закрепляется время  $t_1$ , то и мощность излучения надо рассчитывать на единицу времени  $t_1$ .

Мощность же излучения  $\mathcal{W}_*$  рассчитана на единицу времени наблюдателя  $t$ . Для пересчета на мощность по отношению ко времени излучающего заряда  $t_1$  величину  $\mathcal{W}_*$  следует умножить на производную  $\partial t / \partial t_1 = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$ . Тогда мощность в расчете на единицу времени заряда и единицу телесного угла будет

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \mathcal{W}_*(1 - \vec{n}\vec{\beta}) = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}|^2 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (85)$$

Обозначив угол между векторами  $\vec{\beta}$  и  $\vec{w}$  через  $\pi/2 - \alpha$ , построим на них базис с ортами

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{w}/w - \sin \alpha \vec{\beta}/\beta}{\cos \alpha}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{\beta} \times \vec{w}}{\beta w \cos \alpha}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}. \quad (86)$$

Тогда

$$\vec{\beta} = \beta \vec{e}_3, \quad \vec{w} = w(\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_3). \quad (87)$$

Разложим и вектор направления излучения по этим ортам:

$$\vec{n} = \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (88)$$

Тогда

$$\vec{\beta} \vec{n} = \beta \cos \theta, \quad \vec{\beta} \vec{w} = \beta w \sin \alpha, \quad \vec{n} \vec{w} = w \mu, \quad \mu = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \phi. \quad (89)$$

Подставив эти скалярные произведения в формулу (85), получим зависимость интенсивности от полярных углов, определяющих направление излучения:

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \left[ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \sin \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right]. \quad (90)$$

Проинтегрировав выражение (90) по направлениям, мы, естественно, получим полную интенсивность (82). Запишем наряду с этим еще одно соотношение:

$$\int \mathcal{W} d^2 n = I, \quad \int \mathcal{W} \vec{n} d^2 n = \vec{\beta} I. \quad (91)$$

Оба соотношения проверяются посредством вычисления несложных интегралов.

4. *Движение по прямой.* Рассмотрим этот случай подробнее, так как для него формулы получаются проще и нагляднее. При  $\vec{\beta} \parallel \vec{w}$

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (92)$$

Поскольку на концах промежутка изменения угла  $\theta$  неотрицательная функция  $\mathcal{W}$  обращается в нуль, внутри она должна иметь максимум. Действительно, он достигается при

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}, \quad \sin \theta_{\max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{1 + 3\beta^2 + \sqrt{1 + 15\beta^2}}}. \quad (93)$$

При малых скоростях последний знаменатель в (92) можно заменить единицей. Тогда распределение излучения по направлениям описывается простым множителем  $\sin^2 \theta$  (ясно, что при этом нет зависимости от азимута). Прямо вперед и назад излучения нет, а во всех других направлениях оно примерно одинаково. Максимум достигается при  $\theta = \pi/2$ .

Если заряд ультрарелятивистский, то характер излучения совсем другой. Разность в знаменателе  $1 - \beta \cos \theta$  в (92) при близких к единице  $\beta$  близка к единице при всех углах, кроме малых. Если же  $0 < \theta \ll 1$ , то этот знаменатель близок к нулю и дробь становится очень большой. Продемонстрируем это количественно.

При малых углах и скоростях, близких к скорости света, рассматриваемую разность можно преобразовать следующим образом:

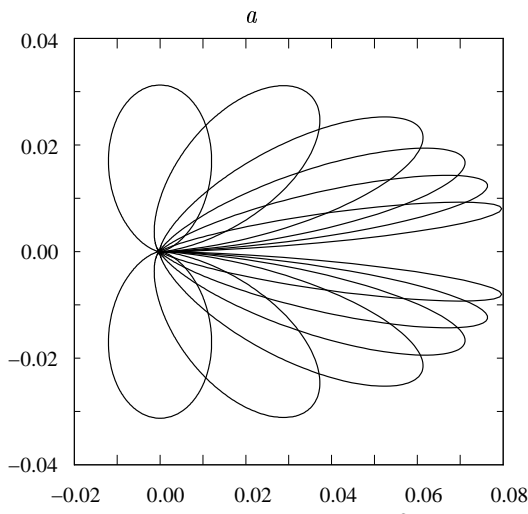
$$1 - \beta \cos \theta = 1 - \beta + \beta(1 - \cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} + 2\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \sim \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}. \quad (94)$$

Подставив ее в (92) и заменив синус на угол, получим

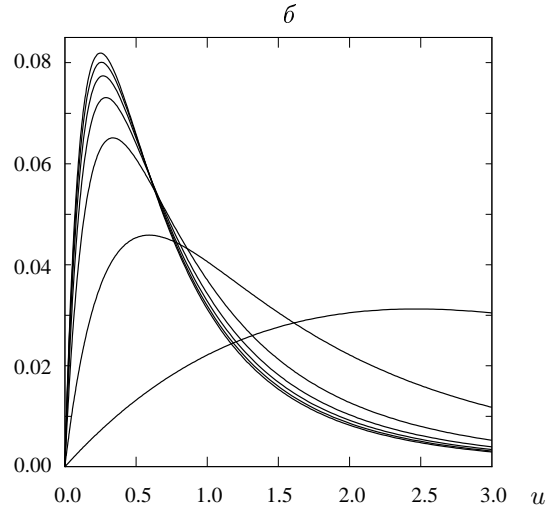
$$\mathcal{W} \sim \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \theta^2 \left( \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right)^5 = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2^5 \gamma^8 \frac{u}{(1 + u)^5}, \quad u = (\theta\gamma)^2. \quad (95)$$

Таким образом, в существенной части мощность излучения зависит от произведения  $\theta\gamma$ . В частности, максимум эта мощность достигает при  $u = 1/4$ , т. е.  $\theta_{\max} = 1/(2\gamma)$ , что согласуется с (93). Максимальное значение дроби  $u/(1 + u)^5$  равно  $2^8/5^5$ . Половинное от максимального значение мощность принимает при двух корнях уравнения  $u/(1 + u)^5 = 2^7/5^5$ . Эти корни  $u = 0.05303$  и  $u = 0.8216$ . Соответствующие значения углов  $\theta = 0.2303/\gamma$  и  $\theta = 0.9065/\gamma$ .

На рис. 5а приведены полярные диаграммы функций  $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$ , т. е. безразмерных множителей, определяющих направленность излучаемой зарядом энергии (92), при  $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$ . Соответствующие значения  $\gamma = 1.154, 1.167, 2.294, 3.203, 5.025$ . Диаграммы с ростом  $\beta$  становятся все более узкими и вытянутыми. Множители  $32\gamma^8$ , принимающие значения  $32, 1.01 \cdot 10^2, 1.91 \cdot 10^3, 2.46 \cdot 10^4, 3.54 \cdot 10^5, 1.30 \cdot 10^7$ , введены для возможности помещения кривых на один график. Без этих множителей реальная вытянутость кривых растет катастрофически. На рис. 5б значения тех же функций отложены в зависимости от аргумента  $u = (\theta\gamma)^2$ .



**Рис. 5а.** Отношения  $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$  при  $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$  и  $0.98$  в полярных координатах.



**Рис. 5б.** Те же величины, что и на рис. 5а, в зависимости от аргумента  $u = (\theta\gamma)^2$  и предел при  $\beta \rightarrow 1.0$ .

Большим значениям  $\beta$  соответствуют большие величины максимумов. Там же помещена и предельная кривая  $u/(1+u)^5$ , отвечающая  $\beta = 1, \gamma = \infty$ . Видно, как кривые с приближением  $\beta$  к 1 приближаются к своей предельной кривой, причем значительная близость достигается уже при не очень больших  $\gamma$ .

Хотя точная функция распределения излучения по направлениям заменена на приближенную, ошибка при больших  $\gamma$  невелика. Так, полная интенсивность, находящаяся по точной и по приближенной формулам, если во второй продолжить интегрирование по углу до бесконечности, получается одной и той же:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \int_{-1}^1 \frac{1 - \eta^2}{(1 - \beta\eta)^5} d\eta = \frac{4}{3}\gamma^6, 2^5\gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{(1 + \theta^2\gamma^2)^5} = \frac{4}{3}\gamma^6. \quad (96)$$

Тот же порядок, что и угол максимальной мощности излучения, имеют средние степени угла, взвешенные по распределению интенсивности:

$$\langle \theta^\delta \gamma^\delta \rangle = \frac{3}{4\gamma^6} 2^5 \gamma^{10+\delta} \int_0^\infty \frac{\theta^{\delta+3} d\theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} = \frac{1}{2} \Gamma(3 - \delta/2) \Gamma(2 + \delta/2) = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) \frac{\pi \delta/2}{\sin(\pi \delta/2)}. \quad (97)$$

Средние имеют смысл при  $-4 < \delta < 6$ . В частности, средний угол и средний квадрат угла

$$\langle \theta \rangle = \frac{9\pi}{32} \frac{1}{\gamma} = \frac{0.8836}{\gamma}, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (98)$$

Соответственно дисперсия и стандарт равны

$$D\theta = \frac{0.2193}{\gamma^2}, \quad \sqrt{D\theta} = \frac{0.4683}{\gamma}. \quad (99)$$

Таким образом, излучение ультрарелятивистского заряда, который движется мгновенно по прямой, т. е. проходит через точку перегиба своей траектории, где вторая производная от радиуса-вектора по времени равна нулю, сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка  $1/\gamma$  в сторону его движения, хотя прямо по направлению этого движения излучения нет. Заметим, что в собственной системе отсчета заряд неподвижен и соответственно излучает. Движущийся заряд увлекает за собой и создаваемое им поле.

Случай движения заряда по окружности заслуживает отдельного рассмотрения, которое будет осуществлено в разделе, посвященном магнито-тормозному механизму излучения.

#### § 4. Термодинамическое равновесие

В заключение этой главы кратко опишем состояние термодинамического равновесия, понятие о котором не относится прямо к содержанию главы, однако оно используется в дальнейшем.



Термодинамическое равновесие подробно описано в различных учебниках, например, в курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [30]. При нем происходят различные процессы, но каждый прямой процес уравнивается обратным, так что в целом ничего не меняется. Состояние вещества и излучения характеризуется одним параметром — температурой.

Здесь укажем используемые в других главах формулы, выполняющиеся при термодинамическом равновесии (ТДР).

Это во-первых, формула Максвелла распределения частиц по скоростям, которая приводится в тех местах, где она применяется.

Во-вторых, формула Больцмана, устанавливающая равновесное распределение населенностей атомов (или ионов) по связанным состояниям при температуре  $T$ :

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} e^{-(E_i - E_j)/k_B T}, \quad (100)$$

где  $n_i$  и  $n_j$  — концентрации атомов в состояниях с энергиями  $E_i$  и  $E_j$ ,  $g_i$  и  $g_j$  — статистические веса этих состояний (число подуровней). Третья формула называется формулой ионизации или формулой Саха и определяет распределение элементов по стадиям ионизации:

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = 2 \frac{g^+}{g_1} \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_1/k_B T}. \quad (101)$$

В этой формуле  $n^+$  — концентрация ионов,  $n_1$  — концентрация атомов массой  $m$  в основном состоянии с энергией  $E_1 = -\chi_1 < 0$ ,  $g^+$  и  $g_1$  — соответствующие статистические веса.

Три указанные формулы определяют равновесное состояние вещества. Состояние излучения характеризуется формулой Планка, согласно которой интенсивность излучения при ТДР дается функцией Планка  $B_\nu(T)$ :

$$I_\nu = B_\nu(T), \quad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}. \quad (102)$$

## Глава III. Тормозной и рекомбинационный механизмы

### § 1. Тормозной механизм (нерелятивистская теория)

1. *Постановка задачи.* Задача, рассматриваемая в этом параграфе, относится к теории неупругих столкновений, когда в результате столкновения двух частиц рождается еще одна частица — фотон. Тормозное излучение — это излучение заряда при кулоновском столкновении заряженных частиц. Частицы считаем нерелятивистскими.

Заряды движутся по гиперболам и, поскольку это движение с ускорением, в каждый момент времени излучают электромагнитные волны. Для нахождения этого излучения и его спектра надо найти напряженности поля, а затем их преобразования Фурье по времени. Вместо этого воспроизведем простой вывод формулы для сечения тормозного излучения, основанный на порядковых оценках. Этот вывод дан, например, в книге Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [18].

Мощность полного (во всех направлениях) излучения движущегося точечного заряда в дипольном приближении дается формулой Лармора (II.79)

$$I(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \quad (103)$$

Здесь  $\vec{d}$  — дипольный момент системы двух зарядов  $Z_1 e$  и  $Z_2 e$ :

$$\vec{d} = e(Z_1 \vec{r}_1 + Z_2 \vec{r}_2), \quad (104)$$

а точкой отмечается производная по времени.

Будем считать, что частица 2 с зарядом  $Z_2 e$  и массой  $m_2$  пролетает мимо частицы 1 с зарядом  $Z_1 e$  и массой  $m_1$ . Обозначим через  $\vec{R}$  радиус-вектор их центра масс, а через  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  радиус-вектор относительного движения. Тогда радиусы-векторы каждой из частиц выразятся через  $\vec{R}$  и  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m}{m_2} \vec{r}. \quad (105)$$

Здесь  $m$  — приведенная масса:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (106)$$

Дипольный момент также можно выразить через эти векторы:

$$\vec{d} = e[(Z_1 + Z_2) \vec{R} + m(Z_2/m_2 - Z_1/m_1) \vec{r}]. \quad (107)$$

Поскольку движение центра масс двух частиц (равномерное и прямолинейное) не приводит к излучению, достаточно рассматривать относительное движение, т. е. в (103) надо подставить

$$\ddot{\vec{d}} = m e (Z_2/m_2 - Z_1/m_1) \ddot{\vec{w}}. \quad (108)$$

Здесь  $\ddot{\vec{w}}$  — ускорение относительного движения.

Из (108) видно, что не всякие заряды могут излучать. В частности, взаимодействие одинаковых частиц не приводит к излучению в дипольном приближении.

Наибольший интерес представляет тормозное излучение электрона в поле иона. Будем считать ион водородоподобным с некомпенсированным зарядом  $Ze$ . Положим  $Z_2 = -1$ ,  $Z_1 = Z$ . Поскольку масса иона значительно больше массы электрона, можно принять, что приведенная масса совпадает с массой электрона (которую мы также будем обозначать просто  $m$ ).

2. *Оценка излучаемой энергии.* Закрепим относительную скорость  $v$  и прицельное расстояние налетающего электрона  $b$ . Основная часть взаимодействия происходит тогда, когда частицы достаточно близки друг к другу. В качестве характерного расстояния взаимодействия можно взять  $b$ . Тогда характерное время взаимодействия частиц  $t \sim b/v$ . Характерная величина ускорения (сила, деленная на приведенную массу)  $w \sim Z e^2/(m b^2)$ . Полное излучение за все время взаимодействия

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt \quad (109)$$

можно оценить так:

$$\Delta E \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{Z e^2}{m b^2} \right)^2 \frac{b}{v} \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2} \frac{1}{b^3 v}. \quad (110)$$

Проинтегрируем эту величину по всем прицельным расстояниям, т. е. найдем излучение  $q$  равномерно распределенного потока налетающих электронов. Нас будет интересовать спектр этой величины. Спектральную плотность излучения обозначим  $dq/d\omega$ . Тогда

$$q = \int_0^{\infty} \Delta E 2\pi b db = \int_0^{\infty} \frac{dq}{d\omega} d\omega. \quad (111)$$

3. *Спектр излучения электрона.* Для нахождения  $dq/d\omega$  свяжем прицельное расстояние с частотой. Основной вклад в преобразование Фурье по времени на частоте  $\omega$  дают значения  $t$ , для которых  $\omega t \sim 1$ . Следовательно, частота, на которой в основном излучает частица с прицельным расстоянием  $b$ , по порядку величины  $\omega \sim v/b$ . Поэтому основной вклад в излучение на частоте  $\omega$  дают частицы с прицельным расстоянием  $b \sim v/\omega$ . Подставляя это соотношение в (111) (в том числе и в дифференциал  $db$ ), получим

$$q \approx \int_0^{\infty} \Delta E 2\pi b^3 d\omega/v. \quad (112)$$

Отсюда находим

$$\frac{dq}{d\omega} \approx \frac{4\pi Z^2 e^6}{3 m^2 c^3 v^2}. \quad (113)$$

Если выводить формулу точно в рамках классической электродинамики, то получится выражение, отличающееся от (113) множителем порядка единицы. Примерно такой же множитель дает учет квантовомеханических эффектов. Окончательно, выражение для  $dq/d\omega$  можно записать в форме

$$\frac{dq}{d\omega} = \frac{16\pi Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2} g_{cc}(v, \nu). \quad (114)$$

Здесь  $g_{cc}(v, \nu)$  — так называемый множитель Гаунта (или гаунт-фактор). Его аргумент  $\nu$  — обычная (не круговая) частота, применяемая, как правило, в астрофизике. Величину (114) также рассчитывают на единицу частоты  $\nu$ , т. е. полагают

$$\frac{dq}{d\nu} = 2\pi \frac{dq}{d\omega} = \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2} g_{cc}(v, \nu). \quad (115)$$

Формула (114) без множителя Гаунта была выведена Х. А. Крамерсом в 1923 году.

Вместо (115) в физике часто используется другая величина, а именно, дифференциальное сечение тормозного излучения ( $\sigma$  означает переход электрона из континуума в континуум):

$$\beta_{cc}(v, \nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{dq}{d\nu}. \quad (116)$$

Эта величина размерности  $cm^2 c$  представляет собой число излучаемых фотонов в расчете на единицу частоты и единицу времени, если падает единичный поток (1 электрон на единичную площадку в единицу времени) на одну мишень. Согласно формуле (115)

$$\beta_{cc}(v, \nu) = \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2 h \nu} g_{cc}(v, \nu). \quad (117)$$

Величина (115) отличается от (117) тем, что она дает излучаемую энергию, а не число фотонов.

4. *Усреднение по скоростям.* Теперь выражение (117) можно усреднить по скоростям налетающих электронов. Почти всегда можно считать, что они распределены по Максвеллу:

$$f(v) = \frac{4\pi v^2 m^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right). \quad (118)$$

Энергия фотонов с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , испускаемых в единице объема в единицу времени электронами со скоростями от  $v$  до  $v + dv$ , равна  $h\nu \beta_{cc}(v, \nu) d\nu n_e n^+ f(v) v dv$ . Произведение  $f(v) dv$  равно доле электронов с указанными скоростями, множитель  $v$  учитывает, что из этих электронов попадут в мишень за единицу времени лишь те, которые отстают от нее не далее, чем на  $v$ .

Полная энергия, испускаемая всеми электронами, получается интегрированием. В результате найдем количество энергии, испускаемой единицей объема за единицу времени в единичном интервале частот в единичном

телесном угле. Эта величина называется излучательной способностью, или объемным коэффициентом излучения  $\epsilon_{cc}(\nu)$ . Во все направления излучается

$$4\pi\epsilon_{cc}(\nu) = n_e n^+ h\nu \int_{v_{\min}}^{\infty} \beta_{cc}(v, \nu) f(v) v dv. \quad (119)$$

Нижний предел в интеграле отражает тот факт, что не всякий электрон может излучить фотон частоты  $\nu$ . Действительно, после испускания фотона в поле иона скорость электрона уменьшается. Обозначим скорость электрона после излучения через  $v'$ . Ясно, что должен выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v')^2}{2} + h\nu. \quad (120)$$

Справа и слева величины положительны, следовательно справедливо неравенство  $v \geq v_{\min} = \sqrt{2h\nu/m}$ .

Интеграл в (119) удобнее вычислять, взяв в качестве переменной интегрирования  $v'$ . Принимая во внимание соотношения между дифференциалами скоростей  $v dv = v' dv'$  и значениями функции Максвелла  $f(v)/v^2 = f(v') \exp(-h\nu/k_B T)/(v')^2$ , а также вынося из-под интеграла среднее значение множителя Гаунта (который слабо зависит от скорости), находим окончательно

$$\epsilon_{cc}(\nu) = n_e n^+ \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3} \frac{k_B T}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}(\nu, T) \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right). \quad (121)$$

Экспоненциальный множитель определяет характерный для тормозного излучения так называемый завал по частоте. На рис. 1 отражен спектр коэффициента тормозного излучения для ряда значений температуры без учета гаунтовских множителей.

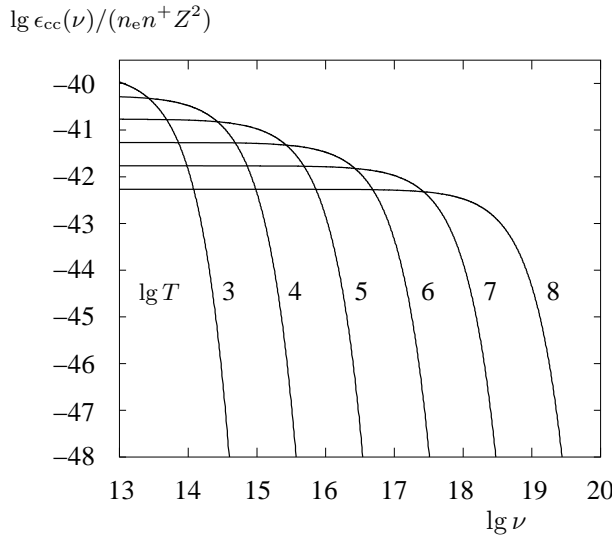


Рис. 1. Коэффициент тормозного излучения  $\epsilon_{cc}(\nu)$ .

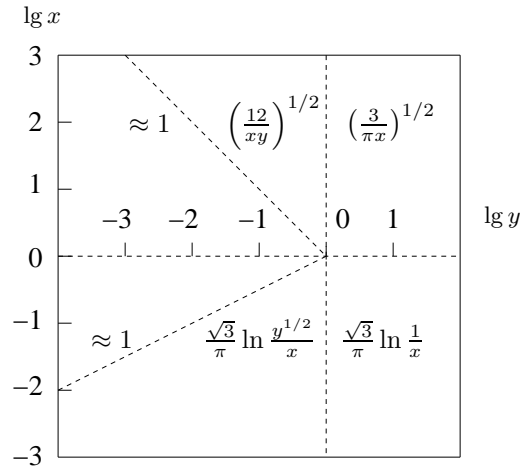


Рис. 2. Оценка множителя Гаунта  $g_{cc}(\nu, T)$ .

Формула для полного излучения, т. е. во всех частотах, также легко выводится, если опять вынести среднее значение множителя  $g_{cc}(\nu, T)$ :

$$\epsilon_{cc}(T) = \int_0^{\infty} \epsilon_{cc}(\nu) d\nu = n_e n^+ \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3} \frac{(k_B T)^2}{h(2\pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}. \quad (122)$$

Если подставить в (122) значения всех постоянных, то получится (здесь и дальше численные оценки даются без учета множителя Гаунта)

$$4\pi\epsilon_{cc}(T) = 1.42 \cdot 10^{-27} Z^2 T^{1/2} n_e n^+ (e/cm c^3). \quad (123)$$

5. *Поглощение.* Найдем сечение поглощения. Это процесс, обратный тормозному излучению: пролетающий мимо иона электрон поглощает фотон, энергия которого добавляется к кинетической энергии электрона согласно закону сохранения (120). Но теперь начальная энергия электрона может быть произвольной (нерелятивистской), в частности, нулевой.

Для вывода формулы для сечения поглощения воспользуемся обычным приемом. Примем, что выполняется термодинамическое равновесие (ТДР). Концентрации атомов в состоянии ТДР отметим звездочкой. Запишем условие детального баланса: число фотонов, излучаемых единицей объема в единицу времени, равно числу поглощаемых фотонов:

$$n_e n_*^+ f(v) dv \frac{\beta_{cc}}{4\pi} d\nu \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = n_e n_*^+ f(v') dv' k_{cc} \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \quad (124)$$

Здесь  $v$  и  $v'$  скорости электрона, удовлетворяющие соотношению (120). Множитель в квадратных скобках учитывает вынужденное излучение. Подставив в (124) распределение Максвелла и формулу Планка, получим

$$k_{cc}(v', \nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{v^2}{v'} \beta_{cc}(v, \nu) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 ch} \frac{g_{cc}(v, \nu)}{v' \nu^3} = 1.80 \cdot 10^{14} \frac{Z^2}{v' \nu^3}. \quad (125)$$

Сечение поглощения также можно усреднить по максвелловскому распределению скоростей электронов, но проще написать условие детального баланса, которое имеет вид соотношения Кирхгофа—Планка:

$$n_e n^+ \bar{k}_{cc}(\nu, T) B_\nu(T) = \epsilon_{cc}(\nu, T) \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(t) \right], \quad (126)$$

откуда

$$\bar{k}_{cc}(\nu, T) = \int_0^\infty k_{cc}(v', \nu) f(v') dv' = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{ch} \frac{k_B T}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}(\nu, T) \frac{1}{\nu^3} = 3.69 \cdot 10^8 \frac{Z^2}{T^{1/2}} \frac{1}{\nu^3}. \quad (127)$$

Размерность сечений поглощения  $k_{cc}$  —  $\text{см}^5$ , а коэффициента поглощения  $\alpha_{cc} = n_e n^+ k_{cc}$  —  $1/\text{см}$ .

6. *Гаунтовские множители.* Многие авторы оценивали эти множители, исходя из различных предположений. Здесь на рис. 2 воспроизведены данные книги [87]. Используются обозначения  $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ ,  $y = \frac{k_B T}{Z^2 \chi_H}$ , где  $\chi_H = me^4/2\hbar^2 = 2\pi^2 me^4/h^2$  — энергия ионизации водорода из основного состояния.

Исходя из выведенных формул можно получить сечения фотоионизации и фоторекомбинации, что мы сделаем в § 3.

## § 2. Релятивистское тормозное излучение

1. *Описание процесса.* В этом параграфе дадим описание процесса тормозного излучения электрона при пролете его в поле ядра с учетом релятивистских и квантовых эффектов [6].

Будем считать, что ядро имеет заряд  $Z$ , а масса его настолько велика, что ее можно принять равной бесконечности, т. е. рассматривать ядро как неподвижный центр. Электрон считается релятивистским, т. е. его скорость достаточно велика, чтобы его можно было рассматривать как свободную частицу, описываемую плоской волной.

Пусть электрон с импульсом  $\vec{p}$  излучает фотон с импульсом  $\vec{k}$ , а сам приобретает новый импульс  $\vec{p}_1$ . Этот электрон называют вторичным. Излучение свободным электроном фотона невозможно, однако при наличии ядра излишний импульс  $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{k} - \vec{p}$  забирает это ядро. Бесконечность массы ядра позволяет не принимать во внимание отдачу при излучении, т. е. положить передаваемую ядру энергию равной нулю. В связи с этим закон сохранения энергии в рассматриваемом процессе соблюдается, в то время как сохранения импульса не происходит.

Все вычисления производятся в системе отсчета, в которой рассеивающий центр покоится. Ввиду неучета отдачи не все приводимые величины являются релятивистски ковариантными.

Квантовому процессу тормозного излучения электрона отвечают две диаграммы Фейнмана:

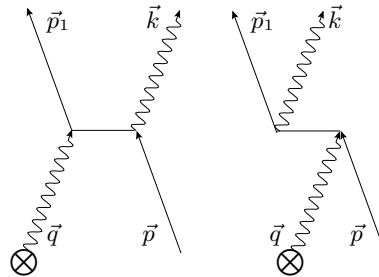


Рис. 3. Диаграммы тормозного излучения.

На диаграммах сплошными линиями изображается электрон, а волнистыми — фотон. Точки, где линия фотона выходит из линии электрона или входит в нее (узлы), соответствуют взаимодействию между ними, так что тормозное излучение является процессом второго порядка. В промежутках между взаимодействиями изображается так называемый виртуальный электрон. В реакции участвует внешнее стационарное электрическое поле ядра, что отмечено волнистой линией с перечеркнутым кружком на ее конце.

Для описания релятивистских частиц вводим четырехмерные импульсы фотона и электронов:  $\underline{k} = \{k, \vec{k}\}$ ,  $\vec{k} = k\vec{\omega}$ ,  $|\vec{\omega}| = 1$ ,  $\underline{p} = \{p_0, \vec{p}\}$ ,  $\underline{p}_1 = \{p_{01}, \vec{p}_1\}$ . Их компоненты подчиняются соотношениям  $\underline{k}^2 = k^2 - \vec{k}^2 = 0$ ,  $\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$ ,  $\underline{p}_1^2 = p_{01}^2 - \vec{p}_1^2 = m^2 c^2$ . Скалярное произведение определяется, как обычно:  $\underline{p}\underline{k} = kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k(p_0 - \vec{p}\vec{\omega})$ . Как уже говорилось, выполняется только один закон сохранения:  $p_{01} + k = p_0$ . Поэтому из шести неизвестных компонент импульсов электрона и фотона после излучения можно найти только одну. Обычно принимают, что это энергия электрона после излучения:  $p_{01} = p_0 - k$ . Частоту фотона (или величину импульса  $k$ ), его направление  $\vec{\omega}$ , а также направление электрона после излучения  $\vec{\Omega}$  необходимо задать.

Введем обозначения для безразмерных импульсов и энергий фотона и электронов:

$$x = \frac{k}{mc}, \quad z = \frac{p}{mc}, \quad z_1 = \frac{p_1}{mc}, \quad \gamma = \sqrt{1 + z^2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 + z_1^2}. \quad (128)$$

2. *Сечение тормозного излучения.* Оно получается обычной процедурой квантовой электродинамики [6]. Полное сечение, т. е. сечение, проинтегрированное по направлениям вторичного электрона и излученного фотона, когда закреплены лишь энергия исходного электрона и частота излучаемого фотона, можно представить в виде

$$d\sigma(x, z) = 4Z^2 \alpha_{\text{fs}} r_e^2 \frac{z_1}{z} \frac{dx}{x} F, \quad (129)$$

где  $F(\gamma, x) = F_1 + F_2$ ,

$$F_1 = \frac{4}{3} - 2\gamma\gamma_1 \left( \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_1^2} \right) + l \frac{\gamma_1}{z^3} + l_1 \frac{\gamma}{z_1^3} - \frac{l l_1}{z z_1}, \quad F_2 = \quad (130)$$

$$= \mathcal{L} \left[ \frac{8}{3} \frac{\gamma\gamma_1}{z z_1} + \frac{x^2}{z^3 z_1^3} (\gamma^2 \gamma_1^2 + z^2 z_1^2 + \gamma\gamma_1) + \frac{x}{2z z_1} \left( l \frac{\gamma\gamma_1 + z^2}{z^3} - l_1 \frac{\gamma\gamma_1 + z_1^2}{z_1^3} \right) \right]. \quad (131)$$

Здесь для краткости введены обозначения для логарифмов комбинаций энергий электрона до и после излучения:

$$l = \ln \frac{\gamma + z}{\gamma - z} = 2 \ln(\gamma + z), \quad l_1 = \ln \frac{\gamma_1 + z_1}{\gamma_1 - z_1} = 2 \ln(\gamma_1 + z_1), \quad (132)$$

$$\mathcal{L} = \ln \frac{\gamma\gamma_1 + z z_1 - 1}{\gamma\gamma_1 - z z_1 - 1} = 2 \ln \frac{\gamma\gamma_1 + z z_1 - 1}{x}. \quad (133)$$

Использованы обозначения:  $\alpha_{\text{fs}} = e^2/\hbar c$  — постоянная тонкой структуры,  $r_e = e^2/mc^2$  — классический радиус электрона, а безразмерная энергия электрона после рассеяния  $\gamma_1 = \gamma - x$ . Сечение  $F(\gamma, x)$  симметрично по отношению к характеристикам электрона до и после излучения.

Формула для сечения справедлива в борновском приближении, когда отношение  $Z\alpha_{\text{fs}}c/v = Z\alpha_{\text{fs}}\gamma/z \ll 1$ . При релятивистских скоростях  $v \sim c$  и  $\gamma \sim z$ , так что заряд иона  $Z$  не должен быть слишком велик.

При малых  $z_1$  в формулах (130)–(131) происходят сокращения, которые во избежание потерь точности при вычислениях следует произвести аналитически.

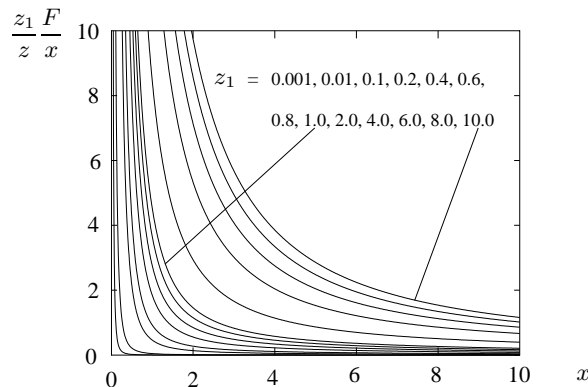


Рис. 4. Спектр тормозного излучения при различных импульсах вторичного электрона.

На рис. 4 представлены графики безразмерного произведения  $\frac{z_1 F}{z x}$  в зависимости от частоты испущенного фотона при некоторых значениях импульса вторичного электрона. Соответствующие значения скорости падающего электрона  $\frac{z}{\gamma} = \frac{\sqrt{z_1^2 + x^2 + 2x\gamma_1}}{\gamma_1 + x}$ . Хотя по требованиям теории эта скорость не может бы малой, рисунок это требование не учитывает. Для получения сечения (129) приведенные величины нужно умножить на  $5.795 \cdot 10^{-28} Z^2 dx \text{ см}^2$ .

3. *Частные и предельные случаи.* Рассмотрим, какие формы принимает сечение в предельных случаях соотношений между определяющими его величинами.

1) Остановившийся электрон. В пределе  $z_1 \rightarrow 0$ , когда вся энергия электрона передается фотону, часть сечения  $F$  стремится к конечной функции частоты  $x$ . Действительно, перейдя к пределу в формулах, получим

$$\mathcal{F}_1 = \lim_{z_1 \rightarrow 0} F_1 = -\frac{4}{3}(\gamma - 1) - 2\frac{l}{z} + \frac{2}{z^2} \left( \frac{l}{2z} - \gamma \right), \quad (134)$$

$$\mathcal{F}_2 = \lim_{z_1 \rightarrow 0} F_2 = \frac{2}{x} \left[ \frac{8}{3}\gamma + x^2 + x \left( l \frac{\gamma + z^2}{2z^3} - 1 \right) + \frac{x\gamma}{z^2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{6} \right) \right]. \quad (135)$$

В приведенных формулах величины представлены как функции аргументов  $z$ ,  $\gamma$  и частоты фотона  $x$ . Однако только одна из них может быть выбрана в качестве независимой, так как они связаны соотношениями  $\gamma = 1 + x = \sqrt{1 + z^2}$ ,  $z = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{x(2 + x)}$ ,  $x = \gamma - 1 = \frac{z^2}{\gamma + 1}$ . Обозначение  $l$  теперь представляет предельную величину:  $l = 2 \ln(\gamma + z) = 2 \ln(1 + x + \sqrt{x(2 + x)})$ . Если и частоту фотона устремить к нулю, то  $z \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ . При этом предел  $\mathcal{F}_1$  при  $x \rightarrow 0$  равен конечной величине, величина же  $\mathcal{F}_2$  стремится к бесконечности, так что мы приведем первое слагаемое, характеризующее его поведение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_1 = -\frac{4}{3}, \quad \mathcal{F}_2 \sim \frac{16}{3} \frac{1}{x}. \quad (136)$$

2) Нерелятивистский предел. Если импульс начального электрона настолько мал, что можно принять  $z \ll 1$  (но по-прежнему  $z \gg Z\alpha_{\text{fs}}$ , так что зазор возможных значений  $z$  невелик), то импульс фотона еще меньше, так как в нерелятивистском пределе закон сохранения энергии  $x = \gamma - \gamma_1$  переходит в

$$x = \frac{z^2 - z_1^2}{2} \ll z. \quad (137)$$

Поэтому  $F_1 \ll F_2$ , в этой, большей величине (131) можно опустить все слагаемые в квадратных скобках кроме первого, в котором  $\gamma$  и  $\gamma_1$  положить равными 1, а в логарифме (133) заменить их разложениями с удержанием одного слагаемого:

$$\mathcal{L} \sim \ln \frac{1 + (z^2 + z_1^2)/2 + zz_1 - 1}{1 + (z^2 + z_1^2)/2 - zz_1 - 1} = \ln \frac{(z + z_1)^2}{(z - z_1)^2} = 2 \ln \frac{z + z_1}{z - z_1}. \quad (138)$$

В результате в формуле для сечения  $F_1$  окажется равным нулю, так что

$$F = F_2 = \frac{16}{3} \frac{1}{zz_1} \ln \frac{z + z_1}{z - z_1}. \quad (139)$$

3) Ультрарелятивистский предел. Здесь в формулах надо положить  $z \sim \gamma$ ,  $z_1 \sim \gamma_1$ ,  $x = \gamma - \gamma_1$  и пренебречь слагаемыми порядка  $1/\gamma^2$ ,  $1/\gamma_1^2$  и выше. Тогда

$$\mathcal{L} \sim 2 \ln \frac{2\gamma\gamma_1}{x}, \quad F_1 \sim -2 \left( \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma} - \frac{2}{3} \right), \quad F_2 \sim -\mathcal{L}F_1, \quad F_1 + F_2 = -F_1(\mathcal{L} - 1). \quad (140)$$

Если энергии электрона до и после излучения велики, то под знаком логарифма стоит большая величина даже при  $x \approx \gamma$ .

4) Граница спектра. Это случай, когда релятивистский электрон излучает почти всю свою энергию, но все же не останавливается. Тогда  $x \approx \gamma \approx z \gg 1$ ,  $z_1 \ll \gamma$  и  $\mathcal{L} \sim 2 \ln \frac{\gamma\gamma_1 + \gamma z_1}{\gamma} = l_1$ ,

$$F_1 \sim 2\frac{\gamma}{z_1^2} \left( \frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 \right), \quad F_2 \sim l_1 \frac{\gamma}{z_1^3} \left( \gamma_1^2 + z_1^2 - \gamma_1 \frac{l_1}{2z_1} \right), \quad (141)$$

так что

$$F_1 + F_2 = 2\frac{\gamma}{z_1^2} \left[ 2\gamma_1^2 \frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 - \gamma_1 \left( \frac{l_1}{2z_1} \right)^2 \right] = 2\frac{\gamma\gamma_1}{z_1^2} \left( \gamma_1 + z_1 - \frac{l_1}{2z_1} \right) \left( \frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 + z_1 \right). \quad (142)$$

4. *Связь с нерелятивистскими величинами.* В астрофизической литературе используется сечение тормозного излучения размерности  $см^2с$ , которое в нерелятивистском приближении дается формулой (117):

$$\beta_{cc}(v, \nu) = \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3} \frac{g_{cc}(v, \nu)}{v^2 h \nu} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 \frac{1}{z^2} \frac{1}{\nu} g_{cc}(v, \nu). \quad (143)$$

Дадим обобщение такого сечения на релятивистский случай, для чего выразим  $\beta_c(z, x)$  через величину  $F$ . Заметим, что в нерелятивистском пределе согласно формуле (139)

$$F = \frac{16}{3} \frac{1}{z z_1} \ln \frac{(z + z_1)^2}{2x}. \quad (144)$$

Для обобщения нерелятивистской формулы (143) достаточно положить

$$\beta_{cc}(z, x) = Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 \frac{z_1}{z} \frac{F}{\nu} = 2\pi z^2 \frac{r_e^3}{c} \frac{z_1}{z} \frac{F}{x}. \quad (145)$$

Тогда формулы (145) в нерелятивистском пределе и (143) совпадут, если принять в качестве множителя Гаунта

$$g_{cc}(v, \nu) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{(z + z_1)^2}{2x}, \quad (146)$$

что обычно и делается.

5. *Поглощение и излучение.* Теперь выразим через введенные величины коэффициенты поглощения и излучения. Сначала скорость электронов будем считать закрепленной. Составим релятивистские аналоги соотношений детального баланса тормозных процессов при ТДР. Нерелятивистское соотношение для сечений имеет вид (см. формулу (124))

$$n_e n_*^+ f(v) dv \frac{\beta_{cc}(v, \nu)}{4\pi} d\nu \left[ 1 + \frac{c^2 B_\nu(T)}{2h\nu^3} \right] = n_e n_*^+ f(v_1) dv_1 k_{cc}(v_1, \nu) \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \quad (147)$$

Здесь  $k_{cc}(v_1, \nu)$  — сечение тормозного поглощения (коэффициент поглощения при фиксированной скорости электрона, принимающего энергию фотона, равен  $n_e n_*^+ k_{cc}(v_1, \nu)$ ). Функция  $f(v)$  — нерелятивистское максвелловское распределение (118), нормированное на единичный интеграл по скоростям. При переходе к релятивистским величинам его надо заменить релятивистским распределением Максвелла

$$f_M(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-y\gamma}, \quad (148)$$

где  $y = mc^2/k_B T$  — безразмерная обратная температура, а  $K_2(y)$  — функция Макдональда. Это распределение нормируется условием

$$4\pi \int_0^\infty f_M(\gamma) z^2 dz = 1. \quad (149)$$

Ввиду различной нормировки двух распределений замена должна выглядеть так:

$$f(v) dv \rightarrow 4\pi f_M(\gamma) z^2 dz. \quad (150)$$

Впрочем, численные множители в (147) можно опустить, так как они одинаково появятся как слева, так и справа.

Скорость  $v$  в левой части равенства (147) следует заменить на  $cz/\gamma$ . Тогда релятивистское обобщение равенства (147) предстанет в форме

$$n_e n_*^+ f_M(\gamma) z^2 dz c \frac{z}{\gamma} \beta_{cc}(z, x) d\nu \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = 4\pi n_e n_*^+ f_M(\gamma_1) z_1^2 dz_1 k_{cc}(z_1, x) \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \quad (151)$$

Здесь, как и в (147), написано количество фотонов, слева — излучаемых (включая вынужденное излучение), а справа — поглощаемых единицей объема в единицу времени электронами с определенной скоростью в определенном интервале частот.

Для упрощения соотношения (151) примем во внимание равенства

$$\gamma = \gamma_1 + x, \quad f_M(\gamma) = e^{-xy} f_M(\gamma_1), \quad \frac{z dz}{\gamma} = \frac{z_1 dz_1}{\gamma_1}, \quad (152)$$



а также подставим функцию Планка. Тогда получится связь сечения поглощения с сечением излучения и величиной  $F$ :

$$k_{cc}(z_1, x) = \frac{\beta_{cc}(z, x)}{8\pi} \frac{c^3}{\nu^2} \frac{z^2}{z_1 \gamma_1} = \frac{Z^2}{8\pi} \alpha_{fs} r_e^2 \frac{z}{\gamma_1} F \frac{c^3}{\nu^3}. \quad (153)$$

Нерелятивистский предел этого коэффициента, вытекающий из равенств (147) и (143), имеет вид

$$k_{cc}(v_1, \nu) = \frac{\beta_{cc}(v, \nu)}{8\pi} \frac{c^2}{\nu^2} \frac{v^2}{v_1} = \frac{2}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 \frac{c^2}{\nu^3} \frac{g_{cc}(v, \nu)}{v_1}. \quad (154)$$

Это выражение полностью соответствует формуле (153), так как в нерелятивистском случае  $v = cz$ ,  $v_1 = cz_1$ ,  $\gamma_1 = 1$  и выполняются формулы (144) и (146).

6. *Усреднение по энергиям электронов.* Из соотношения (151), проинтегрированного по импульсам электронов, находим связь между усредненными коэффициентами теплового тормозного излучения  $\epsilon_{cc}(x, y)$  и поглощения  $\alpha_{cc}(x, y) = n_e n_*^+ k_{cc}(x, y)$ , которое запишем в виде

$$\epsilon_{cc}(x, y) \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = \alpha_{cc}(x, y) B_\nu(T). \quad (155)$$

Эта связь совпадает с соотношением Кирхгофа—Планка.

Коэффициент излучения в расчете на один электрон и один ион дается формулами

$$\frac{\epsilon_{cc}(x, y)}{n_e n_*^+} = h\nu c \int_{z_{\min}}^{\infty} \beta_{cc}(z, x) \frac{z^3}{\gamma} f_M(\gamma) dz = Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 h c e^{-xy} \int_0^{\infty} F f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1. \quad (156)$$

Здесь  $z_{\min}$  — наименьший импульс электрона, способного излучить фотон частоты  $x$ . Ясно, что  $\gamma_{\min} = 1 + x$ , так что  $z_{\min} = \sqrt{x(2+x)}$ . Звездочку у концентрации ионов в общем случае ставить не надо.

Полное сечение поглощения (т. е. усредненное по скоростям электронов) выражается через тот же интеграл:

$$k_{cc}(x, y) = \int_0^{\infty} k_{cc}(z_1, x) 4\pi z_1^2 f_M(\gamma_1) dz_1 = \frac{Z^2}{2} \alpha_{fs} r_e^2 \frac{c^3}{\nu^3} \int_0^{\infty} F f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1. \quad (157)$$

Из формул (153) и (157) с очевидностью следует, что размерность сечений поглощения  $см^5$ .

Таким образом, для получения коэффициентов релятивистского тормозного поглощения и излучения надо вычислить интеграл

$$\tilde{F}(x, y) = \int_0^{\infty} F(\gamma, x) f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1 = \frac{y}{4\pi K_2(y)} \int_1^{\infty} F(\gamma, x) e^{-y\gamma_1} z z_1 d\gamma_1. \quad (158)$$

Интеграл (158) вычисляется численно. На рис. 5 приведены графики, отражающие зависимость произведения  $4\pi\tilde{F}(x, y)$  от частоты  $x$ , для некоторых температур, характеризуемых параметром  $y$ .

Заметим, что если энергия электрона сравнима с энергией покоя протона, то ион нельзя считать бесконечно тяжелым. Расчет тормозного излучения ультрарелятивистских частиц более сложен (см. [6]). Тормозное излучение возможно также при взаимодействии электрона с электроном и электрона с позитроном, но это процессы третьего порядка по взаимодействию и их описание более громоздко [6].

### § 3. Рекомбинационный механизм

1. *Сечение рекомбинации.* Рекомбинация, точнее фоторекомбинация, — это присоединение ионом электрона с излучением фотона и превращение иона в атом (или ион меньшей стадии ионизации). Рекомбинация может произойти как на основной уровень атома, так и на возбужденные уровни. В последнем случае вслед за рекомбинацией происходят каскадные переходы на уровни, расположенные ниже, в результате чего излучаются фотоны в спектральных линиях.

В этом параграфе тем же приближенным способом выведем выражения для сечения рекомбинации с образованием водородоподобного иона. Снова следуем изложению книги [18].

Энергии дискретных состояний водородоподобного иона  $E_i = -Z^2 \chi_H / i^2$ , где  $i$  — главное квантовое число. Пусть электрон с положительной энергией  $mv^2/2$  переходит в одно из связанных состояний  $i$ . При этом излучается фотон, частота которого определяется законом сохранения энергии:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} - E_i. \quad (159)$$

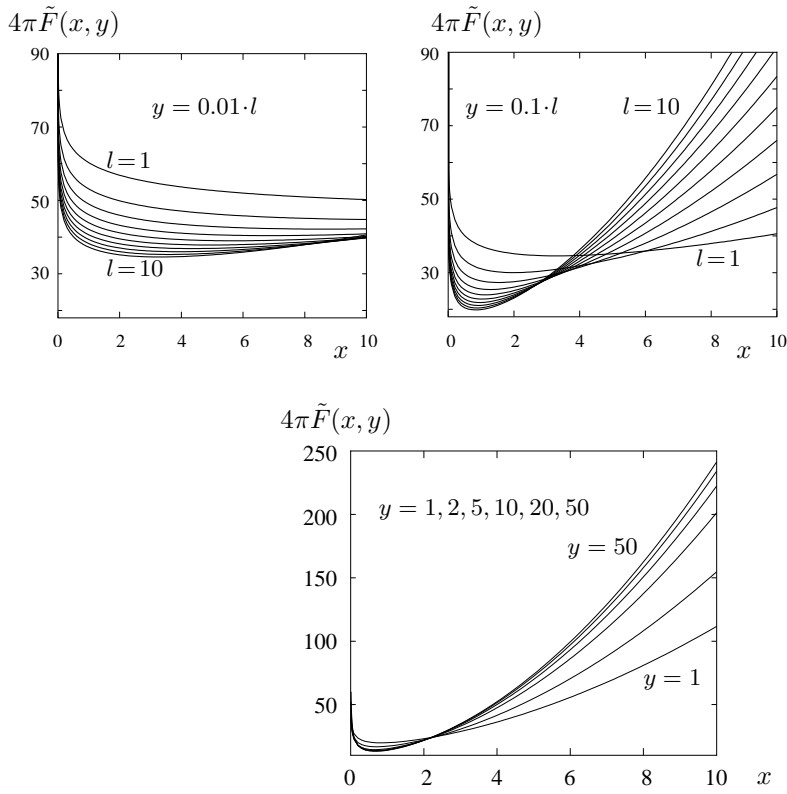


Рис. 5. Спектральная зависимость интеграла  $\tilde{F}(x, y)$  при различных температурах

Закрепим скорость электрона  $v$  и будем считать, что дискретные уровни расположены близко друг к другу, так что их номер можно рассматривать как непрерывно изменяющуюся переменную. Тогда можно написать дифференциальное соотношение

$$\frac{d\nu}{di} = -\frac{1}{h} \frac{dE_i}{di} = Z^2 \frac{2}{h} \frac{\chi_{\text{H}}}{i^3}. \quad (160)$$

Сечение рекомбинации получим, рассматривая этот процесс как продолжение тормозного излучения на дискретные конечные состояния. При действии обоих механизмов излучаются фотоны с частотами от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , количество которых  $\frac{1}{h\nu} \frac{dq_\nu}{d\nu} d\nu$ . Но при рекомбинации ион переходит в состояние атома с интервалом дискретных уровней энергии с номерами от  $i$  до  $i + di$ . Поэтому по аналогии с (116) можно написать следующее соотношение:

$$\beta_{ci}(v, \nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{dq_\nu}{d\nu} \frac{d\nu}{di} = \frac{2^7 \pi^4 Z^4 e^{10}}{3\sqrt{3} mc^3 h^4 i^3} \frac{1}{v^2 \nu} g_{ci}(v), \quad (161)$$

где  $g_{ci}(v)$  — соответствующий гаунтовский множитель.

2. *Излучательная способность.* Теперь найдем, сколько энергии излучается при рекомбинациях в единице объема за единицу времени в расчете на единичный интервал частот и в единицу телесного угла. Для этого закрепим не скорость электрона, а номер уровня, на который происходит рекомбинация. Тогда соотношение (159) устанавливает связь между скоростью электрона и частотой излучаемого фотона, причем  $mvdv = h d\nu$ . Частота излучаемого фотона может быть любой, но не меньшей частоты предела  $i$ -той серии  $\nu_i = -E_i/h$ , так что при рекомбинации излучается непрерывный спектр за пределом  $i$ -той серии. Из сказанного следует, что

$$\epsilon_{ci}(v) d\nu = n_e n^+ h\nu \frac{1}{4\pi} \beta_{ci}(v) v dv f(v). \quad (162)$$

Подставив выражение для сечения (161) и для функции Максвелла (118), а также учтя связь скорости электрона и частоты (159), найдем

$$\epsilon_{ci}(v) = n_e n^+ \frac{2^7 \pi^4 Z^4 e^{10} m}{3\sqrt{3} c^3 h^2} \frac{1}{i^3} g_{ci}(v) \frac{1}{(2\pi m k_{\text{B}} T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_{\text{B}} T} + Z^2 \frac{\chi_{\text{H}}}{2i^2 k_{\text{B}} T}\right). \quad (163)$$

Формулы (161) и (163) (без множителей Гаунта) также были получены Х. А. Крамерсом. Множитель Гаунта задается приближенной формулой [24]

$$g_{ci}(v) \approx 1 - 0.1728 \left(\frac{h\nu}{Z^2 \chi_{\text{H}}}\right)^{1/3} \left(\frac{2 Z^2 \chi_{\text{H}}}{i^2 h\nu} - 1\right). \quad (164)$$

Наряду с излучательной способностью часто используется интегральная величина, а именно, коэффициент спонтанной рекомбинации. Это число рекомбинаций в единице объема в единицу времени

$$A_{ci}(T) = \frac{4\pi}{n_e n^+} \int_{\nu_i}^{\infty} \epsilon_{ci}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu} = \int_0^{\infty} \beta_{ci}(\nu) f(\nu) \nu d\nu. \quad (165)$$

Если вынести среднее значение гаунтовского множителя из-под интеграла, то для коэффициента рекомбинации получится приближенная формула

$$A_{ci}(T) = \frac{2^9 \pi^5 Z^4 e^{10} m}{3\sqrt{3} c^3 h^3} \frac{1}{i^3} \frac{\bar{g}_{ci}}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} E_1\left(\frac{h\nu_i}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{h\nu_i}{k_B T}\right). \quad (166)$$

Здесь  $E_1(x)$  — интегральная показательная функция. На рис. 6 представлены кривые зависимости  $A_{ci}(T)$  от температуры.

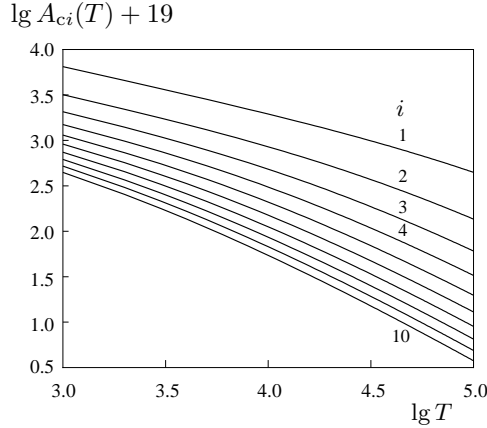


Рис. 6. Коэффициенты  $A_{ci}(T)$  при  $i = 1(1)10$ .

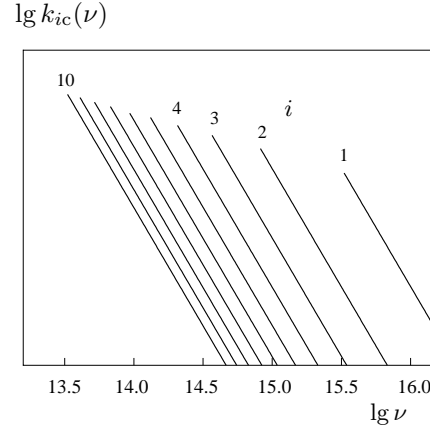


Рис. 7. Коэффициенты  $k_{ic}(\nu)$  при  $i = 1(1)10$ .

3. *Коэффициент ионизации.* Сечение ионизации находится точно так же, как и сечение тормозного поглощения — из условия детального баланса при ТДР:

$$4\pi n_i k_{ic}(\nu) B_\nu(T) \frac{d\nu}{h\nu} = n_e n^+ f(\nu) \nu d\nu \beta_{ci}(\nu) \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right]. \quad (167)$$

Принимая во внимание формулы Больцмана, Саха (для водородоподобного иона  $g^+ = 1$ ) и Планка, получаем

$$k_{ic}(\nu) = \frac{1}{g_i} \frac{c^2 m^2 \nu^2}{h^2 \nu^2} \beta_{ci}(\nu) = \frac{2^6 \pi^4}{3\sqrt{3}} Z^4 \frac{e^{10} m}{ch^6} \frac{1}{i^5} \frac{1}{\nu^3} g_{ci}(\nu). \quad (168)$$

Эта окончательная формула справедлива для водородоподобных ионов при произвольных условиях. Напомним, что входящая в некоторые величины скорость электрона должна находиться из соотношения (159), причем, как и выше, формула для  $k_{ic}(\nu)$  справедлива при  $\nu \geq \nu_i$ . На рис. 7 даны графики сечения поглощения  $k_{ic}(\nu)$  для  $i = 1(1)10$  в зависимости от частоты в произвольных относительных единицах.

Согласно формуле (168) наибольшие значения сечения поглощения за счет ионизации наблюдается у голов серий, т. е. при  $\nu = \nu_i$ , причем при ионизации из  $i$ -го состояния оно пропорционально  $i$ .

Для получения коэффициента поглощения надо найти сумму  $\alpha_{bf}(\nu) = \sum_{i=i_0(\nu)}^{\infty} n_i k_{ic}(\nu)$ , где нижний предел в сумме определяется из условия  $\nu \geq \nu_{i_0(\nu)}$ . Напомним, что высокие состояния не осуществляются, хотя здесь это обстоятельство не столь существенно, как при вычислении суммы по состояниям, так как ряд сходится.

При выполнении условия локального термодинамического равновесия, когда справедливы формулы Максвелла, Больцмана и Саха (но не Планка), коэффициент поглощения за счет ионизации представляют в таком же виде, что и  $\alpha_{cc}$ :  $\alpha_{ic} = n_e n^+ \tilde{k}_{ic}$ , где

$$\tilde{k}_{ic}(\nu) = \frac{2^6 \pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 m e^{10}}{ch^3} \frac{g_{ci}(\nu)}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \frac{1}{i^3} \frac{1}{\nu^3} e^{-E_i/k_B T}. \quad (169)$$

Размерность  $k_{ic}$  —  $см^2$ , а  $\tilde{k}_{ic}$  —  $см^5$ .

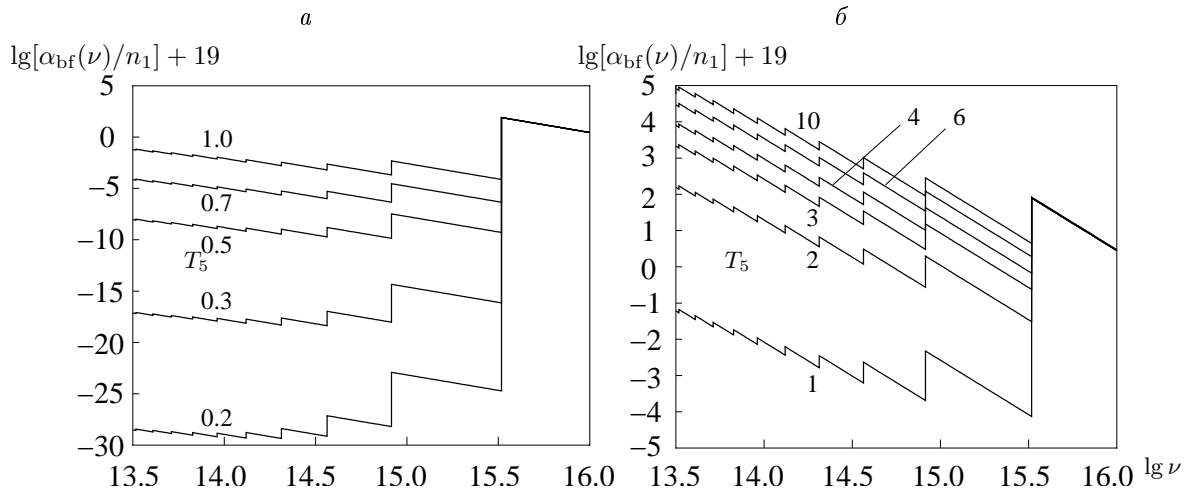


Рис. 8. Значения  $\lg[\alpha_{\text{bf}}(\nu)/n_1] + 19$  для  $T = T_5 \cdot 10^5$ ,  $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$  (а) и  $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$  (б).

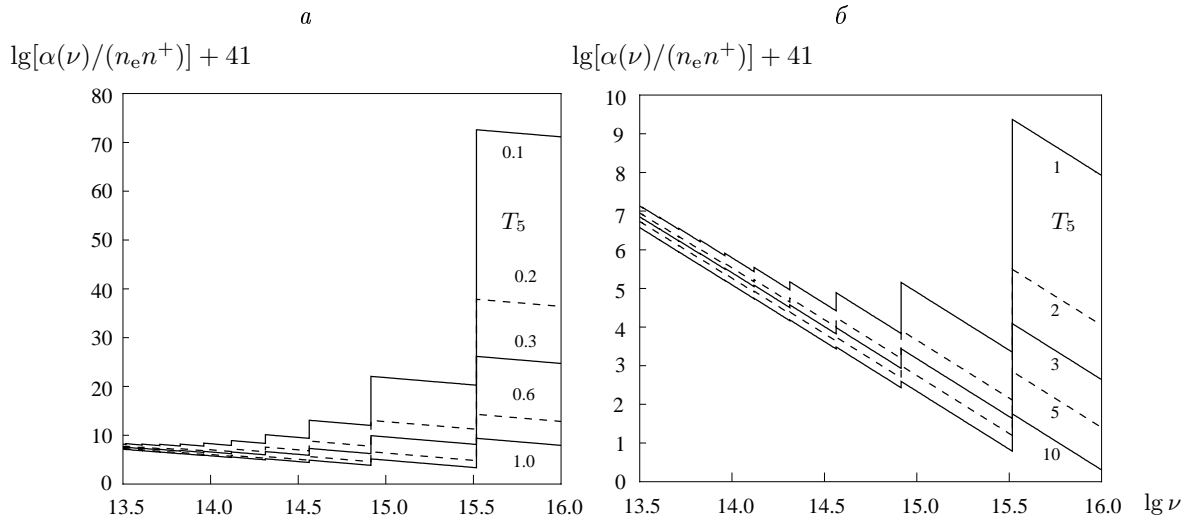


Рис. 9. Значения  $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+) + 41$  для  $T = T_5 \cdot 10^5$ ,  $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$  (а) и  $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$  (б).

Для примера приведены графики спектральной зависимости коэффициентов поглощения за счет связанно-свободных переходов (bound-free)  $\alpha_{\text{bf}}(\nu)$  и полных коэффициентов поглощения  $\alpha(\nu) = \alpha_{\text{cc}}(\nu) + \alpha_{\text{bf}}(\nu)$  за счет тормозного и рекомбинационного механизмов, вычисленные без учета множителей Гаунта для бoльцмановского распределения по состояниям атома водорода и при выполнении формулы Саха. Даны значения  $\lg[\alpha_{\text{bf}}(\nu)/n_1] + 19$  (рис. 8) и  $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+) + 41$  (рис. 9) для температур  $T = T_5 \cdot 10^5$  К. Величины  $T_5$  указаны около кривых. Ясно виден пилообразный характер зависимости от частоты.

Пропорциональность поглощения при свободно-свободных и связанно-свободных переходах обратной третьей степени частоты имеет важные следствия. Например, нейтральный водород непрозрачен для излучения с длиной волны, меньшей  $912 \text{ \AA}$ , и становится прозрачным только в рентгеновском диапазоне.

Формулы для коэффициентов поглощения и излучения, приведенные в двух первых параграфах, широко используются в теории звездных атмосфер, газовых туманностей и других объектов (см. [51]).

4. *Рекомбинационные радиолнии (РРЛ)*. Это линии, возникающие при переходах между высокими уровнями атомов. Для находящихся на таких уровнях внешних электронов почти несущественно внутреннее строение атомного остатка, имеет значение только масса и заряд. Заряд ядра экранируется близкими к нему электронами, так что результирующий заряд совпадает с зарядом остатка. Поле остатка в высокой степени можно считать кулоновским. Поэтому положения линий разных элементов с одинаковыми главными квантовыми числами состояний внешнего электрона близки: различия определяются только различием масс ядер и вследствие этого — приведенных масс. Для определенности рассмотрим здесь линии атома наиболее распространенного элемента — водорода.

В высоко возбужденных состояниях электрон в среднем находится на довольно большом расстоянии от ядра. Среднее расстояние электрона в состоянии с главным квантовым числом  $i$  и азимутальным  $l$  составляет  $\bar{r}_i = 0.269[3i^2 - l(l+1)] \text{ \AA}$  [7], так что при  $i = 1000$  размер атома водорода достигает  $\approx 10^{-8} \cdot 10^6 = 10^{-2} \text{ см}$ ,

т. е. такой атом можно было бы увидеть невооруженным глазом. Однако, осуществлению состояний с высокими уровнями энергии мешают соседние частицы, причем чем больше их концентрация  $N$ , тем меньше номер  $i_*$  последнего уровня, который еще может создаваться. Этот номер определяется из условия разрушения высоких уровней атомов соседними частицами.

Номер  $i_0$  для атома водорода можно определить, например, отождествив с ним номер последней бальмеровской линии, которая наблюдается в спектре рассматриваемого объекта.

В связи с этим возникает следующий способ определения концентрации частиц  $N$  в астрофизических объектах. Ясно, что радиус, который еще может иметь атом, не подвергаясь разрушению окрестными частицами, приблизительно определяется условием  $Nr_{i_*}^3 \sim 1$ . Так как это  $i_*$ , как правило, достаточно большое, то  $r_{i_*} \approx 10^{-8}i_*^2$  см, так что  $N \propto i_*^{-6}$ . Номер  $i_*$  можно определить из наблюдений, хотя это сделать не очень просто из-за конечной ширины линий и слияния их у предела бальмеровской серии. Влияние эффекта Штарка, дополнительно расширяющего линии и приводящего к их более раннему слиянию, еще увеличивает степень номера до 7.5. Эта трудность усугубляется, если недостаточно разрешение спектрографа. В то же время ошибка в номере на несколько единиц приведет к большой ошибке в концентрации, так как зависимость  $N$  от  $i_*$  очень сильная. Тем не менее, когда лучшего способа нет, приходится прибегать к этому. Еще в 30-е годы была выведена формула Инглиса—Теллера, связывающая  $N$  и  $i_*$ :

$$\lg N = 23.26 - 7.5 \lg i_* \quad (170)$$

Эта формула затем многократно уточнялась.

Например, в спектрах звезд  $i_*$  порядка десятка, в спектрах туманностей — до сотни, а в спектрах межзвездной среды доходит до нескольких сотен. Столь высокие уровни проявляются не в бальмеровской серии, а при переходах между высокими уровнями, которые образуют рекомбинационные радиолнии.

Как известно, линии водорода, объединенные тем, что у них общий нижний уровень, образуют серии. Если переход происходит на первый уровень, линии попадают в УФ область, называются лаймановскими и обозначаются  $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$ . Вторая серия — бальмеровская — располагается в видимой области, ее линии  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$ . Первые две серии выделены тем, что они отделены друг от друга и от других серий. Все остальные серии в той или иной степени перекрываются, а линии высоких серий сильно перепутаны, так что для их отождествления необходимо точное измерение частоты или длины волны. В отличие от линий первых серий символами  $H_{i+1\alpha}, H_{i+2\beta}, H_{i+3\gamma}, \dots$  обозначаются линии, у которых общий нижний уровень с главным квантовым числом  $i$ . Для примера укажем, что линия  $H_{103\gamma}$  образуется при переходе  $103 \rightarrow 100$ .

Наибольшую вероятность перехода и, следовательно, интенсивность имеют первые линии серий. У серий с высокими общими уровнями  $i$  интенсивность линии  $H_{i\alpha}$  в пять раз больше, чем у  $H_{i+1\beta}$ , и в 100 раз больше, чем у  $H_{i+5\epsilon}$ . Частоты первых линий серий можно вычислить по формуле

$$\nu_{H_{i\alpha}} = 3288052 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \text{ ГГц} \quad (171)$$

При  $i$  порядка нескольких сотен линии попадают в радиодиапазон.

Эйнштейновские коэффициенты спонтанного перехода  $A_{i+1,i}$  при больших  $i$  пропорциональны  $i^{-5}$ , так что для накопления вдоль луча заметного излучения необходимо много атомов, что осуществляется только в космическом пространстве. Однако оптические толщины в этих линиях все равно очень малы и рассеяния в них не происходит.

На возможность и важность наблюдений РРЛ указал Н. С. Кардашев [27] в 1959 году. Он рассчитал вероятности переходов для этих линий. Первые наблюдения РРЛ были получены в ФИАН (переход  $91 \rightarrow 90$ ) и на Большом Пулковском телескопе (БПР, переход  $105 \rightarrow 104$ ) в 1964 году. В 1966 году были обнаружены РРЛ гелия и углерода.

Часто оказывается, что РРЛ подвержены мазерному усилению. Это объясняется следующим образом. В межзвездной среде (МЗС) в зонах Н II водород сильно ионизован. Почти все нейтральные атомы находятся на основном уровне, населенность второго на много порядков меньше, чем основного. Однако, вследствие того, что свободные электроны эффективно взаимодействуют с высокими уровнями атомов, относительные населенности высоких уровней оказываются близки к равновесным, то есть к определяемым по формуле Больцмана. Более того, чем выше уровень, тем эта близость сильнее. Причиной этого является равновесное (максвелловское) распределение электронов по скоростям, которое достаточно быстро устанавливается при кулоновских столкновениях.

Обозначим отношение реальной концентрации атома водорода в состоянии с главным квантовым числом  $k$  равновесной через  $b_i$ , так что  $n_i = b_i n_i^*$ . Величины  $b_i$  называются мензеловскими множителями. Они были введены Д. Мензелом [77] в связи с расчетами бальмеровского декремента, то есть отношений интенсивностей бальмеровских линий.

Запишем уравнение переноса излучения в линии  $H_{i+1\alpha}$ :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -n_i k_i(\nu) I_\nu + C_i(\nu) n_{i+1} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right]. \quad (172)$$

Коэффициент  $C_i(\nu)$  определяем, как всегда, приравняв правую часть уравнения при ТДР к нулю:

$$n_i^* k_i(\nu) B_\nu(T) = C_i(\nu) n_{i+1}^* \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right], \quad C_i(\nu) = \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{2h\nu^3}{c^2} k_i(\nu). \quad (173)$$

Уравнение переноса переписется в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -n_i k_i(\nu) \left( 1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \right) I_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} k_i(\nu) \frac{g_i}{g_{i+1}} n_{i+1}. \quad (174)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, может быть преобразовано:

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} = 1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}^* b_{i+1}}{n_i^* b_i} = 1 - \frac{b_{i+1}}{b_i} e^{-h\nu/k_B T}. \quad (175)$$

Оба множителя в последнем выражении близки к 1. Разложим их по формуле Тейлора:

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} \approx \frac{b_i + \Delta b_i}{b_i} = 1 + \Delta(\ln b_i), \quad e^{-h\nu/k_B T} \approx 1 - \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (176)$$

Тогда

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \approx \frac{h\nu}{k_B T} - \Delta(\ln b_i). \quad (177)$$

Расчеты населенностей высоких уровней, произведенные путем решения уравнений стационарности, показали, что второе слагаемое в (177)  $\Delta(\ln b_i) > 0$  (так как чем выше уровень, тем он ближе к равновесию, то есть  $b_{i+1}$  ближе к единице, чем  $b_i$ ) и может быть больше первого. Таким образом коэффициент поглощения может быть отрицательным, что и приводит к мазерному эффекту. Хотя оптические толщины в РРЛ невелики, эти линии оказываются более интенсивными и более узкими, чем получается по теории, не учитывающей мазерного эффекта.

В настоящее время наблюдение РРЛ является мощным средством исследования физических условий в разреженных астрофизических объектах. Более подробно о РРЛ можно прочитать в книгах [25, 54] и в энциклопедии [56].

§ 1. Геометрия и терминология

1. *Движение и излучение заряда.* Пусть заряд  $e$  массой  $m$  равномерно движется по окружности в некоторой системе отсчета. Центр окружности находится в начале координат этой системы и считается неподвижным, т. е. система отсчета жестко связана с ним.

По окружности движется заряд во внешнем однородном магнитном поле, если не учитывать излучение заряда и если его скорость перпендикулярна магнитному полю. Если имеется составляющая скорости вдоль поля, то траектория заряда — спираль, точнее — винтовая линия (см., например, [29]). Этот более сложный случай будем рассматривать во вторую очередь.

Влиянием потерь энергии заряда на излучение мы пренебрегаем, т. е. считаем, что траектория заряда в результате излучения не изменяется. Так можно поступать ввиду того, что энергия излучения заряда составляет малую долю его энергии.

Излучение рассматриваемого заряда или совокупности таких зарядов называется магнито-тормозным (именно потому, что заряды тормозятся вследствие излучения, и по аналогии с тормозным излучением заряженных частиц в электрическом поле других зарядов). Если заряды нерелятивистские или ультрарелятивистские, то их излучение называют соответственно циклотронным или синхротронным, в диапазоне промежуточных энергий говорят о гироциклотронном излучении.

Поскольку главное излучение дают заряды с наименьшей массой, в дальнейшем под словом заряд подразумеваем электрон.

2. *Системы отсчета.* При изучении магнито-тормозного излучения приходится рассматривать следующие системы отсчета.

I. Собственная система отсчета заряда. Эта система движется вместе с зарядом по окружности. Ее оси не меняют своих направлений. В собственной системе отсчета определено собственное время  $t_*$ .

II. Система отсчета, в которой электрон равномерно вращается (обращается) по окружности. Начало координат этой системы совмещено с центром указанной окружности. Такую систему можно назвать лабораторной или естественной. Все величины, относящиеся к этой системе, отмечаем индексом  $e$ . Внешнее электрическое поле в ней отсутствует,  $\vec{\mathcal{E}}_e = 0$ , а напряженность магнитного поля направлена по вектору  $\vec{e}_3$ , перпендикулярному плоскости вращения заряда:  $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$  (см. рис. 1).

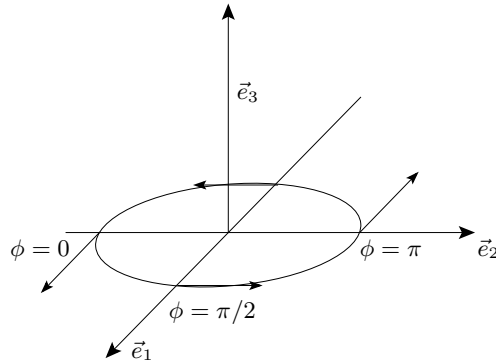


Рис. 1. Вращающийся по окружности заряд.

III. Система отсчета, в которой заряд имеет безразмерную (в единицах скорости света) составляющую скорости по полю

$$\vec{\beta}_{\parallel} = \beta_{\parallel} \vec{e}_3. \quad (1)$$

Величина  $\beta_{\parallel}$ , которая может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления скорости заряда по отношению к направлению поля, является параметром, определяющим скорость заряда и тем самым соответствующую систему отсчета, так что можно рассматривать семейство таких систем. Будем считать, что при любых  $\beta_{\parallel}$  начала координат у них всех расположены на прямой, проходящей через центр окружности вращения электрона и перпендикулярной ей. Эти системы движутся относительно друг друга вдоль магнитного поля и координаты их связаны преобразованиями Лоренца, которые естественно назвать продольными.

Из формул преобразования напряженностей поля (см. [29]) непосредственно следует, что во всех таких системах, координаты и время в которых связаны продольным преобразованием Лоренца, напряженность внешнего

магнитного поля одна и та же, а внешнего электрического поля нет  $\vec{\mathcal{E}}_f = 0$ . Для возможности краткого упоминания таких систем назовем их системами поля. Все величины, относящиеся к этим системам, отмечаем индексом  $f$ .

IV. Система отсчета источника. Источник магнито-тормозного излучения — это объект, в котором в магнитном поле движутся заряды, образующие какие-то потоки или облака. В источнике выбирается система отсчета. Она тоже связана с магнитным полем, т. е. это одна из систем поля, и внешнего электрического поля в ней нет. В этой системе должно быть произведено усреднение по импульсам электронов. Система источника отличается от других систем поля тем, что в ней средний продольный импульс электронов равен нулю. Такую систему отсчета называют также сопутствующей газу электронов.

V. Система отсчета наблюдателя. Система источника движется относительно системы наблюдателя с некоторой (произвольной) скоростью.

Можно считать, что во второй и третьей системах излучает один заряд, в двух последних излучают их ансамбли. Рассмотрим каждую из систем по очереди, но сначала перечислим некоторые постоянные и скалярные величины задачи.

3. *Постоянные.* В задаче о заряде в магнитном поле имеется несколько величин, которые закрепляются. Это прежде всего величина напряженности магнитного поля во всех системах поля  $\mathcal{H}_* > 0$ . Ей соответствует циклотронная частота  $\omega_* = \frac{e\mathcal{H}_*}{mc}$ , где  $e > 0$  — заряд электрона, а  $m$  — его масса, и период  $T_* = 2\pi/\omega_*$ .

Далее, радиус окружности  $R_*$ , по которой обращается заряд, также одинаков во всех системах поля. Из указанных величин можно образовать произведение размерности скорости  $R_*\omega_* > 0$ , а также безразмерную величину  $R_*\omega_*/c > 0$ . Так как напряженность поля и радиус окружности могут быть произвольными, то введенные величины также могут быть сколь угодно большими.

4. *Лабораторная система.* Введем в этой системе ортонормальный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Пусть окружность, по которой движется электрон, лежит в плоскости векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , а магнитное поле  $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$ .

Зададим радиус-вектор заряда относительно центра окружности в виде

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(\phi) = R_* (\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (2)$$

где  $\phi = \omega_e t_e$ ,  $\omega_e$  — угловая скорость движения заряда по окружности,  $t_e$  — время в лабораторной системе отсчета. Четырехмерный вектор положения заряда в этой системе

$$\underline{r}_e = \{ct_e, \vec{r}_e\}. \quad (3)$$

Безразмерный четырехмерный импульс заряда (или, что то же самое, четырехмерная безразмерная скорость) в той же системе отсчета

$$\underline{z}_e = \frac{1}{c} \frac{d\underline{r}_e}{dt_*} = \frac{\gamma_e}{c} \frac{d\underline{r}_e}{dt_e} = \{\gamma_e, \vec{z}_e\}, \quad \vec{z}_e = \gamma_e \vec{\beta}_e, \quad (4)$$

где безразмерная скорость вращения заряда по окружности

$$\vec{\beta}_e = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}_e}{dt_e} = \beta_e (\vec{e}_1 \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \phi), \quad \beta_e = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_e} = \frac{R_*}{c} \omega_e. \quad (5)$$

Безразмерная энергия электрона  $\gamma_e$  выражается через его безразмерную скорость  $\beta_e$  и импульс  $z_e$  в этой системе отсчета обычным образом:

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = \sqrt{1 + z_e^2}. \quad (6)$$

Этот множитель связывает собственное время заряда  $t_*$  со временем в лабораторной системе отсчета и, соответственно, угловую частоту обращения заряда с циклотронной частотой:

$$t_* = \frac{t_e}{\gamma_e}, \quad \omega_e = \frac{\omega_*}{\gamma_e}, \quad (7)$$

так что  $\phi = \omega_e t_e = \omega_* t_*$ . Периоды обращения связаны точно так же:  $T_e = T_* \gamma_e$ . Отметим, что так как длина вектора скорости заряда постоянна, то хотя время  $t_*$  относится к неинерциальной системе отсчета, оно течет равномерно, т. е. отличается от времени  $t_e$  на постоянную величину. Собственное время  $t_*$  — самое медленное для заряда. Радиус  $R_* = \beta_e c \gamma_e / \omega_e$  называется радиусом Лармора.

Из (4) и (5) следует, что характеристики вращательного движения: модули импульса и скорости, лоренцевский множитель и частота вращения при закреплении величин, указанных в п. 3, также постоянны. Действительно,



$$z_e = \gamma_e \beta_e = \frac{R_* \omega_*}{c}, \quad \gamma_e = \sqrt{1 + z_e^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{R_* \omega_*}{c}\right)^2}, \quad (8)$$

$$\beta_e = \frac{z_e}{\gamma_e} = \frac{R_* \omega_*}{\sqrt{c^2 + R_*^2 \omega_*^2}}, \quad \omega_e = \frac{\omega_*}{\sqrt{1 + (R_* \omega_* / c)^2}}. \quad (9)$$

Четырехмерный вектор ускорения и трехмерное ускорение задаются простыми формулами:

$$\underline{w}_e = c \frac{dz_e}{dt_*} = \{0, \gamma_e^2 \bar{w}_e\}, \quad \bar{w}_e = w_e (-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (10)$$

$$w_e = R_* \omega_e^2 = c \beta_e \omega_e = c \omega_* \frac{\beta_e}{\gamma_e} = \frac{R_* \omega_*^2}{\gamma_e^2}, \quad (11)$$

из которых видно, что величина ускорения  $w_e$  является постоянной в указанном выше смысле, как и релятивистский скаляр  $-\underline{w}^2 = \gamma_e^4 w_e^2 = R_*^2 \omega_*^4$ .

Рассмотрим описание движения заряда в системах поля.

5. *Системы отсчета поля.* Можно считать, что векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  у всех таких систем отсчета общие, ибо они, как и другие величины, относящиеся к плоскости этих векторов, например, угол  $\phi$ , не изменяются при продольных преобразованиях Лоренца. Вектор  $\vec{e}_3$ , рассматриваемый как часть четырехмерного, изменяет свою длину, но мы будем временную часть этого вектора во всех системах поля игнорировать, а пространственную нормировать на 1, так что этот вектор тоже можно считать неизменным.

В каждой такой системе электрон равномерно движется по винтовой линии. Составляющую безразмерной скорости электрона вдоль поля, т. е. ее проекцию на вектор  $\vec{e}_3$  мы обозначаем  $\beta_{\parallel}$ , так что вектор безразмерной продольной скорости задается приведенной выше формулой (1).

В отличие от строго положительной величины  $\beta_e$  проекция  $\beta_{\parallel}$  может быть положительной или отрицательной. Соответствующий множитель Лоренца определим, как обычно:  $\gamma_{\parallel} = 1/\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}$ .

Чтобы получить выражение для вектора, описывающего движение заряда в системе поля, надо преобразовать (3) по Лоренцу из лабораторной системы в систему поля. Вторая движется по отношению к первой со скоростью  $-\vec{\beta}_{\parallel} c$ . Продольное преобразование отличается тем, что его скорость перпендикулярна преобразуемому трехмерному вектору  $\vec{r}_e$ , поэтому радиус окружности, которая получается при проецировании траектории электрона на плоскость, перпендикулярную полю, не изменяется и

$$\underline{r}_f = \{ct_f, \vec{r}_f\} = \{\gamma_{\parallel} ct_e, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 ct_e + \vec{r}_e\}. \quad (12)$$

Таким образом, времена в системах поля и лабораторной системе связаны лоренцевскими множителями:  $t_f = \gamma_{\parallel} t_e = \gamma_{\parallel} \gamma_e t_* = \gamma_f t_*$ , так что  $\gamma_f = \gamma_{\parallel} \gamma_e$ . Радиус-вектор заряда в системе поля

$$\vec{r}_f = \vec{r}_f(t_f) = \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} ct_e + \vec{r}_e(\phi) = \vec{\beta}_{\parallel} ct_f + R_* (\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi) \quad (13)$$

равен сумме векторов, один из которых отражает обращение по окружности, а другой — равномерное движение вдоль поля.

Полная безразмерная скорость заряда

$$\vec{\beta}_f = \frac{d\vec{r}_f}{cdt_f} = \vec{\beta}_{\parallel} + \vec{\beta}_{\perp}. \quad (14)$$

Ее перпендикулярная составляющая

$$\vec{\beta}_{\perp} = \beta_{\perp} (\vec{e}_1 \cos \omega_f t_f + \vec{e}_2 \sin \omega_f t_f), \quad \beta_{\perp} = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_f} = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_e} \frac{dt_e}{dt_f} = \frac{\beta_e \omega_e}{\omega_e \gamma_{\parallel}} = \frac{\beta_e}{\gamma_{\parallel}}. \quad (15)$$

Так как составляющие скорости ортогональны, квадрат ее

$$\beta_f^2 = \beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2 = \frac{\beta_e^2}{\gamma_{\parallel}^2} + \beta_{\parallel}^2 = (1 - \beta_{\parallel}^2) \beta_e^2 + \beta_{\parallel}^2, \quad (16)$$

так что лоренцевский множитель полного движения заряда

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_{\parallel}^2)(1 - \beta_e^2)}} = \gamma_e \gamma_{\parallel} \quad (17)$$

равен произведению множителей, соответствующих обращению и движению вдоль поля, что уже отмечалось.

Частоты обращения заряда связаны, как и времена, а именно, частота обращения в системе поля равна  $\omega_f = \omega_e/\gamma_{\parallel} = \omega_*/\gamma_f$ . Поскольку электрон проходит по одной и той же окружности на плоскости, на которую проецируется его траектория, а времена в системах отличаются на постоянные множители, то величина аргумента тригонометрических функций  $\phi = \omega_* t_* = \omega_e t_e = (\omega_e/\gamma_{\parallel}) t_f = \omega_f t_f$  остается неизменной. Период обращения заряда в системе поля составляет  $T_f = 2\pi/\omega_f = (2\pi/\omega_e)\gamma_{\parallel} = T_*\gamma_f$ . Простота связей между соответствующими величинами в рассматриваемых системах отсчета объясняется тем, что все движения, в которые вовлечены электроны, включая обращение по окружности, равномерные.

Безразмерный импульс электрона в системе поля

$$\underline{z}_f = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}_f}{dt_*} = \frac{\gamma_e}{c} \frac{d\mathbf{r}_f}{dt_e} = \frac{\gamma_f}{c} \frac{d\mathbf{r}_f}{dt_f} = \{\gamma_f, \vec{z}_f\}, \quad (18)$$

где

$$\vec{z}_f = z_{\parallel} \vec{e}_3 + z_{\perp} (\vec{e}_1 \cos \omega_f t_f + \vec{e}_2 \sin \omega_f t_f), \quad z_{\parallel} = \beta_{\parallel} \gamma_f, \quad z_{\perp} = \beta_{\perp} \gamma_f = z_e. \quad (19)$$

Его перпендикулярная полю часть остается инвариантом.

Определим так называемый питч-угол  $\alpha$ , т. е. угол между скоростью электрона в системе поля и направлением магнитного поля, так что

$$\beta_{\parallel} = \beta_f \cos \alpha, \quad \beta_{\perp} = \beta_f \sin \alpha. \quad (20)$$

Так как движение вдоль поля равномерное и прямолинейное, то ускорение во всех системах поля определяется формулами, аналогичными (10):

$$\underline{w}_f = c \frac{d\underline{z}_f}{dt_*} = \{0, \gamma_f^2 \vec{w}_f\}, \quad \vec{w}_f = c \frac{d\vec{z}_f}{dt_f} = \frac{d^2 \vec{r}_f}{dt_f^2} = w_f (-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (21)$$

$$w_f = R_* \omega_f^2 = \frac{w_e}{\gamma_{\parallel}^2} = c \beta_{\perp} \omega_f = c \frac{\omega_*}{\gamma_f} \beta_f \sin \alpha. \quad (22)$$

Инвариант

$$-\underline{w}^2 = \gamma_f^4 w_f^2 = R_*^2 \omega_*^4 = c^2 \omega_*^2 \gamma_f^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (23)$$

Если наряду с величиной поля  $\mathcal{H}_*$  постоянным принимается радиус окружности  $R_*$ , то можно считать, что рассматривается один и тот же электрон. В дальнейшем мы будем сравнивать излучение электронов с закрепленными величинами скорости  $\beta_f$  и питч-угла  $\alpha$ . Следует помнить, что они могут относиться к различным электронам, т. е. эти электроны могут обращаться по разным окружностям и иметь различные скорости вдоль поля, связанные только величиной  $\beta_f$ .

Систему источника рассмотрим позже. Что касается системы наблюдателя, то она рассматривается при применении теории к конкретным объектам, относительно которых известно, как они движутся. Если объект находится на космологическом расстоянии, то следует использовать приемлемую космологическую модель.

6. *Полное излучение и классификация.* Найдем полное излучение электрона, движущегося по спирали, т. е. в системе поля, в волновой зоне.

Как известно, релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, которые уносятся излучаемой зарядом электромагнитной волной. Перенос импульса означает, что центр расходящейся сферической волны смещается в сторону движения заряда. Четырехмерный вектор излучаемого импульса пропорционален вектору смещения электрона (формулы (I.81), в качестве  $dt_1$  следует взять  $dt_e$  или  $dt_f$ ), а коэффициентом пропорциональности является мощность излучения, которая в общем случае дается выражением (I.82)

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [-\underline{w}^2], \quad \underline{w}^2 = -\gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2], \quad (24)$$

где  $\underline{w} = \gamma^2 \{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma(\vec{\beta} \vec{w})\vec{\beta}\}$  — пространственноподобный четырехмерный вектор ускорения. Для нашего случая этот вектор определяется формулой (21), а его квадрат — формулой (23), так что

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \beta_e^2 \gamma_e^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} R_*^2 \omega_*^4. \quad (25)$$

Зафиксируем скорость заряда в системе поля и тем самым величины  $\beta_f$ ,  $\gamma_f$  и  $\alpha$ . Закрепим также величину напряженности внешнего магнитного поля  $\mathcal{H}_*$  и рассмотрим предельные случаи, о которых говорилось выше.

1) Нерелятивистский предел. При  $\beta_f \ll 1$  множитель  $\gamma_f \approx 1$  и

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (26)$$

Это излучение называется, как уже говорилось, циклотронным.

2) Ультрарелятивистский предел. Здесь  $\beta_f \approx 1$ ,  $\gamma_f \gg 1$ , так что в случае синхротронного излучения

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (27)$$

Из приведенных формул видно, что циклотронное излучение значительно слабее синхротронного, так как в первом случае  $\beta_f$  мало, а во втором  $\gamma_f$  велико. Однако строго говоря, излучение можно называть синхротронным только, если питч-угол не очень мал (или не близок к  $\pi$ ). Если же  $\alpha$  имеет порядок  $1/\gamma_f$ , т.е.  $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$ , то согласно формуле (27)

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \alpha_0^2. \quad (28)$$

Точно такая же формула справедлива, когда  $\pi - \alpha = \alpha_0/\gamma_f$ . Этот случай по существу не отличается от случая малых питч-углов, просто заряд движется в сторону, противоположную направлению поля. Впредь его отдельно не рассматриваем.

Излучение при малых питч-углах не зависит от  $\gamma_f$  и называется релятивистским дипольным. Основанием к такому названию является формальное совпадение формулы (28) с выражением для интенсивности излучения диполя (I.80) с дипольным моментом  $e|\vec{r}_d| = e c \alpha_0/\omega_*$  и его второй производной в виде  $e|\ddot{\vec{r}}_d| \omega_*^2 = e w_d = e c \alpha_0 \omega_*$ .

В промежуточных случаях, когда скорость электрона умеренно релятивистская, говорят о гиросинхротронном излучении. Подчеркнем еще раз, что излучение полностью отсутствует, если скорость электрона составляет угол 0 или  $\pi$  с направлением поля, так как тогда электрон движется вдоль поля равномерно, без ускорения, и не излучает.

В заключение параграфа сопоставим величину энергии, излучаемой вращающимся по окружности электроном за период  $T_e$ , с его кинетической энергией (I.47). Их отношение равно

$$\frac{I T_e}{\varepsilon} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \beta_e^2 \gamma_e^4 \frac{2\pi}{\omega_e} \frac{1}{m c^2 (\gamma_e - 1)} = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{\mathcal{H}_*}{e} \frac{\beta_e^2 \gamma_e^3}{\gamma_e - 1}. \quad (29)$$

Это отношение достигает значения 1 при напряженности магнитного поля

$$\mathcal{H}_* = \frac{e}{\sigma_T} \frac{2}{\gamma_e (\gamma_e + 1)}. \quad (30)$$

Коэффициент  $e/\sigma_T$ , где  $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2$  — томсоновское сечение, равен  $7.21 \cdot 10^{14}$  Гс. Множитель, зависящий от скорости электрона, при  $\beta_e = 0$  равен 1, а при больших  $\gamma_e$  пропорционален  $2/\gamma_e^2$ . Даже при очень значительных величинах  $\gamma_e$  величина напряженности магнитного поля, определяемая принятым условием, очень велика. Столь большие ее значения могут достигаться в магнитосферах нейтронных звезд, однако при таких напряженностях классическая теория магнитотормозного излучения уже неверна и требуется квантовое рассмотрение. Таким образом, предположение о возможности пренебречь влиянием излучения на траекторию электрона оправдано.

## § 2. Угловая зависимость излучения одиночного заряда в волновой зоне

1. *Интенсивность магнито-тормозного излучения.* Напомним общие формулы, характеризующие излучение заряда, движущегося с ускорением.

Напряженность электрического поля на расстоянии  $R$  от заряда согласно формулам (I.70) и (I.83)

$$\vec{E} = \frac{e}{cR} \vec{n} \times \left[ \frac{\vec{n}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \right] = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (31)$$

Здесь  $\vec{R}$  — вектор, соединяющий фиксированную точку в области движения заряда с точкой наблюдения,  $\vec{n} = \vec{R}/R$  — единичный вектор направления на наблюдателя,  $\vec{\beta}$  и  $\vec{w}$  — безразмерная скорость и ускорение заряда, которые вычисляются в момент запаздывающего времени  $t_1$ . Время  $t_1$  связано со временем наблюдения  $t$  равенством

$$t = t_1 + \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}(t_1)}{c}, \quad (32)$$

где  $\vec{r}(t_1)$  — радиус-вектор заряда, исходящий из указанной фиксированной точки, так что при закреплённом расстоянии  $R$  между дифференциалами времен имеется связь:

$$dt = (1 - \vec{n}\vec{\beta}) dt_1. \quad (33)$$

В первом выражении в (31) производная по времени  $t_1$  берется полная, так как вектор  $\vec{\beta}$  зависит только от этого времени.

Общая формула для мощности излучения заряда, т. е. количества лучистой энергии, испускаемой им в единицу времени, имеет вид

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (34)$$

В этом параграфе все дальнейшее рассмотрение производится в одной из систем поля, однако для определенности индекс  $f$  указываем.

Пусть наблюдатель находится на расстоянии  $R$  от места движения заряда в направлении  $\vec{n}_f$ . Заряд, конечно, перемещается, однако за период его обращения, даже если принять его скорость равной скорости света, он пройдет вдоль поля расстояние не больше  $cT_f = 2\pi c\gamma_f/\omega_* = (2\pi mc^2/e)\gamma_f/\mathcal{H}_* \approx 10^4\gamma_f/\mathcal{H}_*$ . Даже при больших значениях  $\gamma_f$  и малых напряженностях поля, которые характерны, например, для остатков сверхновых и джетов активных ядер галактик, это расстояние намного меньше расстояний до этих объектов.

Для нашего случая выберем входящие в формулу (34) векторы следующим образом. Можно принять, что наблюдатель находится в плоскости векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_3$ , что не является ограничением, так как заряд вращается и его излучение при фиксированном положении наблюдателя по отношению к направлению поля будет одним и тем же, независимо от азимута наблюдателя. Вектор направления на наблюдателя характеризуем поэтому только полярным углом:

$$\vec{n}_f = \vec{e}_1 \sin \theta_f + \vec{e}_3 \cos \theta_f = (\sin \theta_f, 0, \cos \theta_f). \quad (35)$$

Остальные векторы задаются формулами, приведенными в предыдущем параграфе. Запишем их в виде перечисления трех декартовых координат:

$$\vec{\beta}_f = (\beta_\perp \cos \phi, \beta_\perp \sin \phi, \beta_\parallel), \quad \vec{w}_f = -w_f(\sin \phi, -\cos \phi, 0). \quad (36)$$

Найдем произведения векторов, входящие в общую формулу для мощности излучения (34):

$$\vec{n}_f \vec{w}_f = -w_f \sin \theta_f \sin \phi, \quad \vec{n}_f \vec{\beta}_f = \beta_\parallel \cos \theta_f + \beta_\perp \sin \theta_f \cos \phi, \quad \vec{\beta}_f \vec{w}_f = 0. \quad (37)$$

В качестве основных переменных выбираем полную скорость электрона  $\beta_f$  и питч-угол  $\alpha$  согласно соотношениям (20), так что  $w_f = c\beta_f\omega_f \sin \alpha = c\omega_* \frac{\beta_f}{\gamma_f} \sin \alpha$ . Мощность излучения в выбранном направлении тогда будет определяться формулой

$$\mathcal{W}(\theta_f, \phi) = \frac{e^2 w_f^2}{4\pi c^3} \frac{[1 - \beta_f(\cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi)]^2 - (1 - \beta_f^2) \sin^2 \theta_f \sin^2 \phi}{[1 - \beta_f(\cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi)]^5}. \quad (38)$$

2. *Предельные случаи.* Рассмотрим те же предельные случаи, что и в первом параграфе.

1)  $\beta_f \ll 1$ . Малую величину  $\beta_f$  полагаем равной нулю везде, кроме ее квадрата, которому пропорциональна мощность, так что

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \theta_f \sin^2 \phi). \quad (39)$$

2)  $\beta_f \approx 1, \gamma_f \gg 1$ . Из формулы (38) видно, что выражение, стоящее в скобках в знаменателе, почти всегда близко к единице. Однако оно становится малым, когда  $\theta_f$  близко к  $\alpha$ , а угол  $\phi$  близок к кратным  $2\pi$  (будем считать его близким к нулю,  $\phi = \phi_0/\gamma_f$ ). Положим также  $\theta_f = \alpha + \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_f, |\varepsilon| \ll 1$ . Привлекая формулы для синусов и косинусов суммы углов и разлагая эти функции при малых аргументах, получаем

$$\begin{aligned} \cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi &= \cos \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) + \sin \alpha (\sin \alpha \cos \varepsilon + \cos \alpha \sin \varepsilon) \cos \phi = \\ &= \cos \varepsilon (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \phi) - \sin \varepsilon \cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \phi) \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \phi^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Разность  $1 - \beta_f$  обычно умножают на  $1 + \beta_f \approx 2$  и представляют в виде  $1 - \beta_f = \frac{1}{2\gamma_f^2}$ . Таким образом, выражение в квадратных скобках в знаменателе (38) получается следующим:

$$1 - \vec{n}_f \vec{\beta}_f \sim \frac{1}{2\gamma_f^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \sin^2 \alpha \frac{\phi^2}{2} = \frac{1}{2\gamma_f^2} (1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2). \quad (41)$$

Числитель преобразуется аналогично. В результате находим

$$\mathcal{W} \sim 2 \frac{e^2}{\pi c} \omega_*^2 \sin^2 \alpha \gamma_f^4 \frac{(1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2)^2 - 4 \sin^2 \alpha \phi_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2)^5}. \quad (42)$$

Таким образом, почти все излучение заряда идет в направлении мгновенного движения заряда, а далекий наблюдатель, расположенный вблизи конуса с осью вдоль направления поля и углом раствора  $\alpha$ , будет видеть вспышку излучения в тот момент, когда заряд движется прямо на него (конечно, с учетом запаздывания по времени согласно (32)). Такое свечение напоминает мигание маяка или светового сигнала полицейской машины. Для случая вращения заряда по окружности надо положить  $\alpha = \pi/2$  и говорить не о конусе, а о плоскости.

Особым случаем опять является малость угла  $\alpha$ . Положим, как и выше,  $\alpha = \alpha_0/\gamma$ , тогда

$$\mathcal{W} \sim 2 \frac{e^2}{\pi c} \omega_*^2 \frac{\gamma_f^2 \alpha_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^3}. \quad (43)$$

Угловую зависимость излучения определяет большая дробь в (38). Однако, эта зависимость не очень наглядна. Кроме того, если скорость заряда не мала, то прибор наблюдателя не будет регистрировать мгновенное излучение, а произведет усреднение по некоторому промежутку времени, содержащему много периодов вращения заряда. Поэтому найдем интеграл по периоду от величины (38).

3. *Интегрирование по периоду.* Для получения полного излучения за период нужно вычислить два интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^3} = \pi \frac{2 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{5/2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^5} = \frac{\pi}{4} \frac{4 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{7/2}}. \quad (44)$$

Чтобы воспользоваться этими интегралами, введем два обозначения

$$\beta_c = 1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f = 1 - \beta_f \cos \theta_f \cos \alpha, \quad \beta_s = \beta_{\perp} \sin \theta_f = \beta_f \sin \theta_f \sin \alpha. \quad (45)$$

Тогда надо вынести из скобок степени  $\beta_c$  и принять  $\beta_1 = \beta_s/\beta_c$ . Для полного излучения за период получим, что оно равно  $\overline{\mathcal{W}}/\omega_f$ , где

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}(\theta_f, \phi) d\phi = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \frac{\beta_f^2}{\gamma_f^2} \sin^2 \alpha \left[ \frac{2\beta_c^2 + \beta_s^2}{(\beta_c^2 - \beta_s^2)^{5/2}} - \frac{1 - \beta_f^2}{4} \frac{4\beta_c^2 + \beta_s^2}{(\beta_c^2 - \beta_s^2)^{7/2}} \sin^2 \theta_f \right]. \quad (46)$$

Величина  $I$ , которая представляет количество лучистой энергии, протекающей за единицу времени во всех направлениях, связана с  $\overline{\mathcal{W}}$  соотношением

$$I = \frac{\omega_f}{2\pi} \int d^2 n \frac{\overline{\mathcal{W}}}{\omega_f} = \int_0^{\pi} \overline{\mathcal{W}} \sin \theta_f d\theta_f. \quad (47)$$

Приведенную связь между  $I$  и  $\overline{\mathcal{W}}$  можно проверить прямой выкладкой. Для этого в интеграле по углу надо сделать подстановку

$$\mu = \cos \theta_f = \frac{v + \beta_f \gamma_e \sin \alpha \sqrt{1 - \beta_e^2 v^2}}{v \beta_f \sin \alpha + \gamma_e \sqrt{1 - \beta_e^2 v^2}}. \quad (48)$$

При циклотронном излучении  $\beta_f \ll 1$ , так что  $\beta_c = 1$ ,  $\beta_s = \beta_1 = 0$  и

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (2 - \sin^2 \theta_f) = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta_f). \quad (49)$$

Множитель в скобках совпадает по виду с индикатрисой рассеяния Релея [51, 36]. Интенсивность в направлении поля (и противоположном) в два раза больше, чем в плоскости вращения заряда. Полная интенсивность, естественно, и в этом случае получается правильной, что проверить совсем легко.

Синхротронное излучение рассмотрим в отдельном (следующем) пункте.

4. *Синхротронное излучение за период.* Пусть  $\gamma_f \gg 1$ . После подстановки  $\theta_f = \alpha + \varepsilon$  и замены  $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_f$  оценим величины (45):

$$\beta_c = 1 - \beta_f \cos \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma_f^2}\right) \cos \alpha \left[ \cos \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - \varepsilon \sin \alpha \right] \sim$$

$$\sim \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2\gamma_f^2} + \cos^2 \alpha \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon \sin 2\alpha = \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_0 \gamma_f \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha (1 + \varepsilon_0^2)}{2\gamma_f^2}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \beta_s &= \beta_f \sin \alpha (\sin \alpha \cos \varepsilon + \cos \alpha \sin \varepsilon) \sim \left(1 - \frac{1}{2\gamma_f^2}\right) \sin \alpha \times \\ &\times \left[ \sin \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + \varepsilon \cos \alpha \right] \sim \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_0 \gamma_f \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha (1 + \varepsilon_0^2)}{2\gamma_f^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

В обеих формулах имеются одинаковые конечные слагаемые  $\sin^2 \alpha$  и поправочные слагаемые, стремящиеся к нулю при  $\gamma_f \rightarrow \infty$ , которые можно отбросить везде, кроме знаменателей, куда входит разность оцениваемых величин:  $\beta_c - \beta_s = (1 + \varepsilon_0^2)/(2\gamma_f^2)$ ,  $\beta_c^2 - \beta_s^2 = \sin^2 \alpha (1 + \varepsilon_0^2)/\gamma_f^2$ . После подстановки их в выражение (46) получим при не малых  $\alpha$

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sim \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \gamma_f^3 \sin \alpha \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}}. \quad (52)$$

Отметим, что при интегрировании этого предельного выражения по  $\theta_f = \alpha + \varepsilon$ , которое ввиду сосредоточения излучения в узком конусе около питч-угла и быстрого убывания интенсивности с удалением от этого конуса можно распространить по  $\varepsilon$  на всю вещественную ось, получается правильное выражение для полной интенсивности. Действительно,

$$I = \int_0^\pi \overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sin \theta_f d\theta_f \sim \frac{\sin \alpha}{\gamma_f} \int_{-\infty}^\infty \overline{\mathcal{W}} d\varepsilon_0 = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \sin^2 \alpha \gamma_f^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} d\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (53)$$

Последний интеграл вычисляется при помощи замены переменной интегрирования  $z = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$ :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} d\varepsilon_0 = \frac{2}{4} \int_0^1 (1 - z^2)(7 + 5z^2) dz = \frac{8}{3}. \quad (54)$$

Если угол  $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$  мал, то все слагаемые у величин (50)–(51) (кроме слагаемого с квадратом синуса в числителе дроби у  $\beta_s$ ) одного порядка:

$$\beta_c = \frac{\beta_c^0}{2\gamma_f^2}, \beta_s = \frac{\beta_s^0}{2\gamma_f^2}, \beta_c^0 = 1 + \varepsilon_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_0 + \varepsilon_0), \beta_s^0 = 2\alpha_0(\alpha_0 + \varepsilon_0). \quad (55)$$

Выражение для  $\overline{\mathcal{W}}$  довольно громоздко:

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sim 2 \frac{e^2}{c} \frac{\omega_*^2 \alpha_0^2 \gamma_f^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} \frac{[2(\beta_c^0)^2 + (\beta_s^0)^2](1 + \varepsilon_0^2)[1 + (2\alpha_0 + \varepsilon_0)^2] - (\alpha_0 + \varepsilon_0)^2 [4(\beta_c^0)^2 + (\beta_s^0)^2]}{[1 + (2\alpha_0 + \varepsilon_0)^2]^{7/2}}. \quad (56)$$

Таким образом, синхротронное излучение за период идет так же, как и мгновенное, т. е. в конусном слое толщиной порядка  $1/\gamma_f$  около конуса с углом раствора  $\alpha$ . Каждое интегрирование понижает степень  $\gamma_f$ , которой пропорциональна интенсивность:  $\gamma_f^4$  у мгновенного,  $\gamma_f^3$  — у излучения за период,  $\gamma_f^2$  — у полного (во все стороны). Это объясняется малой протяженностью промежутков интегрирования: все они порядка  $1/\gamma_f$ . Если же и питч-угол имеет такой порядок, то степень  $\gamma_f$  еще понижается: у  $\overline{\mathcal{W}}$  на одну, а у  $I$  — на две единицы.

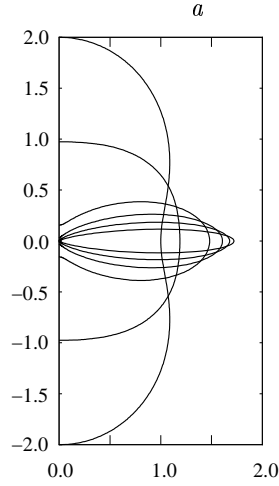
5. *Вращение по окружности.* Посмотрим подробнее, как излучение за период зависит от скорости заряда в простейшем случае вращения по окружности. Для этого случая в формуле (46) надо положить  $\alpha = \pi/2$ . Кроме того, для сравнения со случаем движения по прямой выразим множитель, стоящий в этой формуле перед дробью, через ускорение. Тогда, положив  $\varepsilon = \pi/2 - \theta_f$ , перепишем (46) в виде  $\overline{\mathcal{W}}(\theta_e) = \frac{e^2}{4c^3} \omega_e^2 \mathcal{W}_e(\varepsilon)$ ,

$$\mathcal{W}_e(\varepsilon) = \gamma_e^5 \frac{1 + \frac{3}{4}\beta_e^2 + \left[ \frac{1}{\gamma_e^2} + 2z_e^2 + \left( \frac{1}{2} + z_e^2 \right) \beta_e^2 \right] \sin^2 \varepsilon - \beta_e^2 \left( \frac{1}{4} + z_e^2 \right) \sin^4 \varepsilon}{(1 + z_e^2 \sin^2 \varepsilon)^{7/2}}. \quad (57)$$

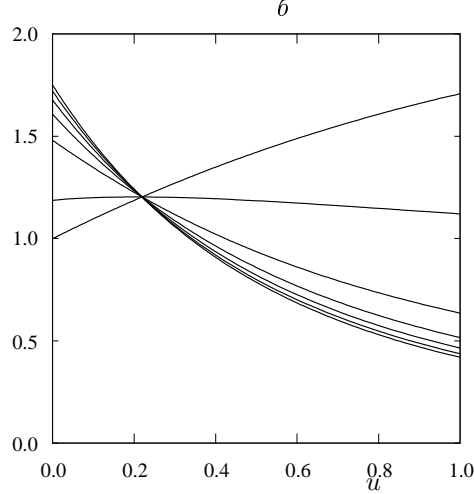
На рис. 2а приведены графики, отражающие зависимость отношения  $\mathcal{W}_e/\gamma_e^5$  от угла  $\varepsilon$  для тех же значений скорости, что и на рисунках 5 Главы I:  $\beta_e = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$ . Большим значениям скорости соответствуют большие значения излучения в плоскости вращения  $\mathcal{W}_e(0)/\gamma_e^5 = 1 + 3\beta_e^2/4$ , причем значения множителя  $\gamma_e^5$ , опущенного для возможности нанести кривые на один рисунок, равны соответственно  $\gamma_e^5 =$

1, 2.053, 12.86, 63.55, 336.9, 3205. Значения этой функции при  $\varepsilon = \pi/2$  (вдоль поля) равны  $(W_e(\pi/2)/\gamma_e^5 = 2$ . Рис. 2а для бóльшей наглядности дан в правильном соотношении масштабов осей. Заметим, что на самом деле кривые рисунков 5а Главы I и 2а являются сечениями поверхностей, характеризующих распределение направлений излучения в пространстве, но если поверхности первых получаются вращением кривых вокруг оси абсцисс, то для получения поверхностей вторых кривые надо вращать вокруг оси ординат.

На рис. 2б те же величины представлены в зависимости от  $u = (\gamma_e \varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2$ . При близких к 1 значениях  $\beta_e$  кривые уже довольно близки к предельной кривой  $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$ , также помещенной на рисунок (кривая верхняя слева и нижняя справа). Кривые пересекаются в точках, близких к точке с абсциссой  $u = 0.219$  и ординатой 1.20.



**Рис. 2а.** Полярные диаграммы функций  $W_e(\varepsilon)/\gamma_e^5$  при  $\beta_e = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$  и  $0.98$ .



**Рис. 2б.** Те же функции в зависимости от аргумента  $u = (\gamma_e \varepsilon)^2$  и предельная кривая  $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$ .

### § 3. Спектр магнито-тормозного излучения в волновой зоне

1. *Характер спектра.* В этом параграфе найдем спектр излучения электрона в магнитном поле в волновой зоне. Сначала рассмотрим общий случай периодического движения заряда с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Период  $T$  рассчитывается по времени влияния  $t_1$ . Но как легко показать, в этом случае и по времени наблюдателя  $t$  излучение заряда имеет тот же период. Действительно, если одновременно прибавить период ко времени  $t_1$  и ко времени  $t$  в равенстве (32), где под вектором  $\vec{r}(t_1)$  подразумевается периодический вектор, то равенство останется верным.

Периодическая функция раскладывается в ряд Фурье. Поэтому спектр излучения заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Найдем интенсивности спектральных линий. Для этого надо определить коэффициент разложения в ряд напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \vec{E}_l e^{-il\omega t}, \quad (58)$$

то есть

$$\vec{E}_l = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \vec{E} e^{il\omega t} dt. \quad (59)$$

Ввиду вещественности напряженности должно выполняться соотношение  $\vec{E}_{-l} = \vec{E}_l^*$ .

Вычислим интеграл от  $\vec{E}^2$  по периоду:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |\vec{E}|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} \vec{E} \vec{E}^* dt = \sum_{l, l'=-\infty}^{\infty} \vec{E}_l \vec{E}_{l'}^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{-il\omega t + il'\omega t} dt = T \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\vec{E}_l|^2. \quad (60)$$

Интеграл от интенсивности излучения представляется в виде

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt_1 W = \int_{-T/2}^{T/2} W_* dt = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_{-T/2}^{T/2} |\vec{E}|^2 dt = \frac{c}{4\pi} R^2 T \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\vec{E}_l|^2, \quad (61)$$

2. *Коэффициент разложения.* Подставляя в интеграл (59) выражение напряженности (31), получаем

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR} \frac{1}{T} \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{I}_l], \quad (62)$$

где обозначено

$$\vec{I}_l = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} e^{il\omega_e t} \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}}. \quad (63)$$

Производную можно считать не частной, так как вектор  $\vec{\beta}$  зависит только от  $t_1$ .

Подставим в формулу (63) связь времени  $t$  со временем  $t_1$  (32) и связь их дифференциалов (33), а затем проинтегрируем по частям:

$$\vec{I}_l = \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 e^{il\omega(t_1 + R/c - \vec{r}\vec{n}/c)} \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} = -il\omega e^{il\omega R/c} \int_{-T/2}^{T/2} e^{il\omega(t_1 - \vec{r}\vec{n}/c)} \vec{\beta} dt_1. \quad (64)$$

Внеинтегральное слагаемое пропадает вследствие периодичности векторов. Полученная формула справедлива для любого периодического движения. Далее перейдем к магнито-тормозному излучению.

Сначала рассмотрим излучение в лабораторной системе. Чтобы не загромождать формулы, опустим индекс  $e$  у вектора направления на наблюдателя  $\vec{n}$  и угла, который он образует с направлением магнитного поля. Этот вектор по-прежнему можно взять в плоскости векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_3$ .

3. *Движение по окружности.* Поскольку заряд движется по окружности и влиянием его излучения на его же движение мы пренебрегаем, то все величины, связанные с этим движением, а именно, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, периодические с периодом  $T_e = 2\pi/\omega_e$ .

Подставим формулы для входящих в подинтегральное выражение векторов для заряда, движущегося по окружности:

$$\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \vec{r} = \frac{c\beta_e}{\omega_e} (\sin \phi, -\cos \phi, 0), \quad \beta_e = \beta_e (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad (65)$$

и сделаем замену  $t_1 = \phi/\omega_e$ . Интеграл (64) перейдет в

$$\vec{I}_l = -il\beta_e e^{il\omega_e R/c} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \phi, -\sin \phi, 0) e^{il\phi - iz \sin \phi} d\phi, \quad (66)$$

где  $z = l\beta_e \sin \theta$ .

Таким образом, необходимо найти два интеграла. Оба они выражаются через бесселевы функции первого рода

$$J_l(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\phi - iz \sin \phi} d\phi = \frac{z}{2\pi l} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\phi - iz \sin \phi} \cos \phi d\phi. \quad (67)$$

Второе представление получается из первого интегрированием по частям. Производная от функции Бесселя

$$J'_l(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\phi - iz \sin \phi} \sin \phi d\phi. \quad (68)$$

Итак, вектор (66) принимает вид

$$\vec{I}_l = -il e^{il\omega_e R/c} 2\pi \left( \frac{1}{\sin \theta} J_l(z), i\beta_e J'_l(z), 0 \right). \quad (69)$$



4. *Формула Шотта.* Чтобы написать формулу для коэффициента разложения напряженности, найдем двойные векторные произведения от двух координатных ортов:

$$\vec{n}_e \times [\vec{n}_e \times \vec{e}_1] = \sin \theta_e \vec{n}_e - \vec{e}_1, \quad \vec{n}_e \times [\vec{n}_e \times \vec{e}_2] = -\vec{e}_2. \quad (70)$$

Удобно ввести орты, перпендикулярные направлению излучения и образующие с ортом  $\vec{n}_e$  правую тройку:

$$\vec{e}_1(\vec{n}_e) = \cos \theta_e \vec{e}_1 - \sin \theta_e \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2(\vec{n}_e) = \vec{e}_2. \quad (71)$$

Тогда  $l$ -тая составляющая напряженности согласно формулам (62), (69), (70) и (71) предстанет в виде

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR} i l \omega_e e^{i l \omega_e R/c} [\text{ctg} \theta_e J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}_e) + i \beta_e J_l'(z) \vec{e}_2(\vec{n}_e)]. \quad (72)$$

Заметим, что составляющая с номером нуль равна нулю.

Подставив результат (72) в формулу (61), получим

$$\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{2\omega_e} R^2 \frac{e^2 \omega_e^2}{c^2 R^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 [\text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z)] = \omega_e \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (73)$$

Для интенсивности  $l$ -той линии (полного излучения в ней)  $W_l$  в расчете на единицу частоты найдем

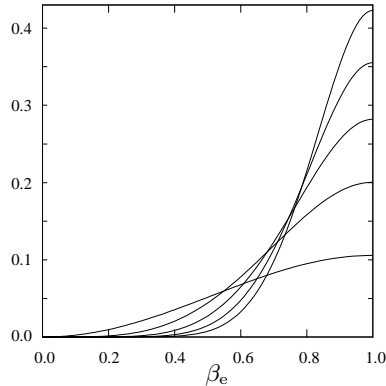
$$W_l = \frac{e^2}{c} l^2 \omega_l, \quad (74)$$

где введено еще одно обозначение

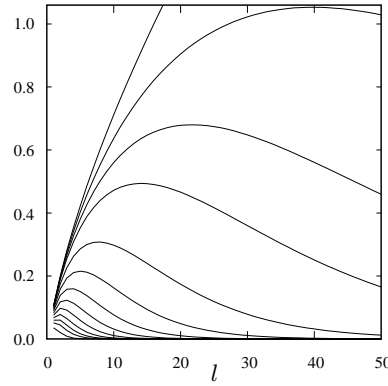
$$\omega_l = \omega_l(\beta_e, \theta_e) = \text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z). \quad (75)$$

Напомним, что аргумент бесселевой функции  $z = l \beta_e \sin \theta_e$ . Величина  $e^2 l^2 \omega_e^2 \omega_l / (4\pi c^2 R^2)$  представляет плотность энергии в линии с номером  $l$  на расстоянии  $R$  от источника, вектор Пойнтинга (потока энергии) имеет дополнительный множитель  $c \vec{n}_e$ .

Формула (74) носит название формулы Шотта, который ее вывел в 1912 г. Она получила широкое применение в различных областях физики и в особенности в астрофизике.



**Рис. 3.** Функции  $l^2 \omega_l(\beta_e, \pi/2)$  при  $l = 1(1)5$  в зависимости от  $\beta_e$ .



**Рис. 4.** Зависимость функций  $l^2 \omega_l(\beta_e, \pi/2)$  от  $l$  при  $\beta_e = 0.4, 0.5(0.05)0.9, 0.925, 0.95, 1.0$ .

На рис. 3 приведены безразмерные интенсивности излучения в первых пяти линиях при  $\theta_e = \pi/2$ , т. е. в основной плоскости, в зависимости от скорости электрона  $\beta_e$  (функции  $l^2 \omega_l(\beta_e, \pi/2)$ ). Рис. 4 дает представление о зависимости интенсивностей в том же направлении от номера линии для значений  $\beta_e = 0.4, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.925, 0.95, 1.0$ . Нанесенные кривые являются огибающими функций  $l^2 \omega_l(\beta_e, \pi/2)$ . При малых  $\beta_e$  интенсивности линий быстро убывают с номером. При  $\beta_e$ , достаточно близких к единице, интенсивности сначала растут, достигают максимума, а затем убывают. При  $\beta_e = 1$  рост с  $l$  неограничен.

3. *Поляризация в линиях.* Каждая линия в спектре магнито-тормозного излучения представляет собой монохроматическую волну и к ней можно применить общую теорию поляризации [36]. Как и всякая строго монохроматическая волна, эти волны полностью эллиптически поляризованы. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим напряженность электрического поля в линии с номером  $l$ , т. е. вектор  $\vec{E}_l$ . Поскольку интенсивность

линии у нас уже найдена, поляризационные характеристики (параметры Стокса) можно находить с точностью до множителя.

Используем орты (71) в качестве поляризационного базиса. Представим напряженность в линии в этих ортах согласно формуле (70) в виде столбца:

$$\vec{E}_l \propto [i \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}_e) - \beta_e J'_l(z) \vec{e}_2(\vec{n}_e)] = \begin{pmatrix} i \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) \\ -\beta_e J'_l(z) \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Поляризационная матрица является обычной матрицей плотности для фотонов одной энергии и одинакового импульса. Она получается как диадное произведение вектора напряженности самого на себя [36]. В астрофизике вместо поляризационной матрицы используются параметры Стокса, которые линейно связаны с элементами матрицы:

$$\hat{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \vec{E}^\dagger = \frac{c}{4\pi} \begin{pmatrix} |\vec{E}_x|^2 & \vec{E}_x \vec{E}_y^* \\ \vec{E}_x^* \vec{E}_y & |\vec{E}_y|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}, \quad (77)$$

где  $I$  — интенсивность излучения,  $Q$  и  $U$  — параметры линейной, а  $V$  — круговой поляризации. В нашем случае роль интенсивности играет  $W_l$ .

Тогда в принятых поляризационных ортах поляризационная матрица излучения в линии с номером  $l$  с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\hat{S}_l = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_l \vec{E}_l^\dagger \propto \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) & -i\beta_e \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) J'_l(z) \\ i\beta_e \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) J'_l(z) & \beta_e^2 J_l'^2(z) \end{pmatrix}, \quad (78)$$

а параметры Стокса с правильным коэффициентом, таким же как у интенсивности, определяемой формулой (74) примут следующие значения:  $U_l = 0$ ,

$$Q_l = \frac{e^2}{c} l^2 [\operatorname{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) - \beta_e^2 J_l'^2(z)], \quad V_l = 2 \frac{e^2}{c} l^2 \beta_e \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) J'_l(z). \quad (79)$$

Легко проверить, что выполняется равенство  $W_l^2 = Q_l^2 + U_l^2 + V_l^2$ , являющееся условием полной поляризации.

Таким образом, излучение в каждой магнито-тормозной линии полностью эллиптически поляризовано, т. е. обладает как линейной, так и круговой поляризацией. В основной плоскости круговая поляризация исчезает ( $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$ ), а линейная становится полной:  $I_l = -Q_l = \frac{e^2}{c} [z J_l'(z)]^2$ . Напротив, при наблюдении вдоль оси вращения электрона, т. е. при  $\theta_e = 0$  или  $\theta_e = \pi$ , поляризация полностью круговая. При этом наблюдатель видит только одну линию, а именно, первую и  $I_1 = V_1 = \frac{e^2 \beta_e^2}{c} \frac{2}{2}$ . Последние утверждения вытекают из свойства бесселевых функций, выражаемого асимптотическим равенством  $J_l(z) \sim (z/2)^l / l!$  при  $z \rightarrow 0$  (формула (Б.109)). Состояния поляризации согласуются с геометрией движения излучающего электрона и положения наблюдателя.

4. *Полное излучение в линиях.* Полное количество энергии, излучаемой в линии, равно интегралу по направлениям от интенсивности (74), т. е.

$$\overline{W}_l(\beta_e) = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_e d\theta_e W_l. \quad (80)$$

При интегрировании возникают два интеграла, которые согласно формулам теории бесселевых функций выражаются через функции Бесселя двойного (по сравнению с номером линии) порядка, так что

$$\overline{W}_l(\beta_e) = 4\pi \frac{e^2}{c} l \left[ \beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \right]. \quad (81)$$

Можно найти суммарные параметры поляризации излучения, идущего во все стороны. При этом  $\overline{V}_l = 0$ , т. е. круговая поляризация исчезает ввиду симметричности правой и левой поляризации, остается только линейная:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_l(\beta_e) &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[ \beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) + l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \left( 1 + \beta_e^2 - \frac{2}{y} \right) \right] = \\ &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[ \beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy + 2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) \frac{1-y}{y} dy \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

В случае нерелятивистского заряда ( $l\beta_e \ll 1$ ) из приведенных формул с помощью уже использовавшегося соотношения:  $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$  при  $z \rightarrow +0$ , легко получить

$$\overline{W}_l \sim 4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l(l+1)}{(2l+1)!} (l\beta_e)^{2l}, \quad \overline{Q}_l \sim -4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l^2}{(2l+1)!} (l\beta_e)^{2l}. \quad (83)$$

Так как множители, зависящие от  $l$ , при малых  $l$  невелики, а при больших  $l$  согласно формуле Стирлинга приближенно пропорциональны  $(2/e)^{2l+1}$ , то за счет множителя  $\beta_e^{2l}$  интенсивности спектральных линий быстро убывают с ростом номера, так что фактически осуществляются только первые циклотронные линии.

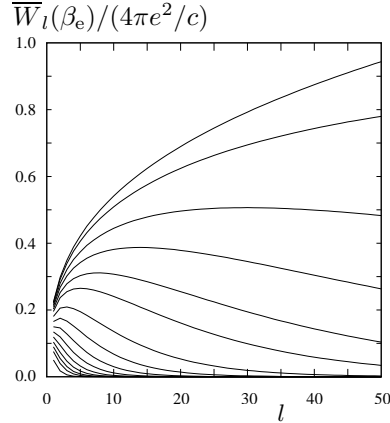


Рис. 5. Полное излучение в линиях при различных  $\beta_e$ .

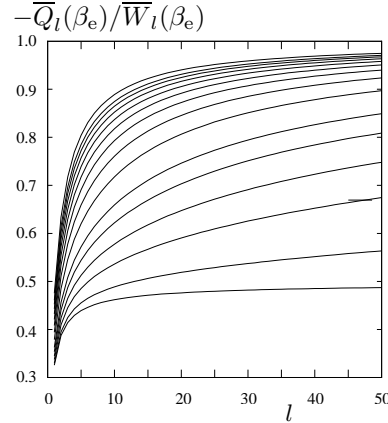


Рис. 6. Степень линейной поляризации в полном излучении.

Рис. 5 дает представление о зависимости от номера линии функции  $\overline{W}_l(\beta_e)$  при различных энергиях электрона. Как и на рис. 4, представлены огибающие дискретных значений этой функции в единицах  $4\pi e^2/c$  при значениях  $\beta_e = 0.4, 0.5(0.05)0.9, 0.925, 0.95, 0.97, 0.99, 1.0$ . Чем больше  $\beta_e$ , тем выше соответствующая кривая. Некоторая негладкость кривых при небольших  $l$  объясняется дискретностью функций. На рис. 6 даются отношения параметра Стокса  $-\overline{Q}_l(\beta_e)$  и интенсивности при тех же значениях  $\beta_e$ . Большим их значениям соответствуют меньшие величины поляризации. Отметим предельные значения степени поляризации. При  $\beta_e \rightarrow 0$  отношение  $-\frac{\overline{Q}_l(\beta_e)}{\overline{W}_l(\beta_e)} \rightarrow \frac{l}{l+1}$ , при  $l \rightarrow \infty$  это отношение стремится к 1, причем тем быстрее, чем меньше  $\beta_e$ .

Поведение спектра синхротронного излучения уже намечается на приведенных рисунках. В следующем параграфе оно будет подробно обсуждено, а в последующих пунктах этого обратимся к вопросу о спектре в системах поля.

5. *Импульс фотона в различных системах.* Для перехода из лабораторной системы в систему поля свяжем характеристики излучения в этих системах. Все характеристики фотонов снабжаем теми же индексами, что и электронные. Направление излучения характеризуем единичными векторами  $\vec{n}_e$  и  $\vec{n}_f$  с соответствующими углами, а энергии фотонов — не частотами, а волновыми числами  $\varkappa_e$  и  $\varkappa_f$ .

Введем четырехмерный вектор импульса (точнее, волновой вектор) фотона  $\underline{x}$ . Для большей наглядности отметим этот вектор индексами  $e$  и  $f$ , когда его составляющие отнесены к соответствующей системе отсчета:

$$\underline{x}_e = \{\varkappa_e, \varkappa_e \vec{n}_e\}, \quad \underline{x}_f = \{\varkappa_f, \varkappa_f \vec{n}_f\}. \quad (84)$$

Соотношение между нулевыми компонентами согласно преобразованию Лоренца дает обычный закон Доплера (см. формулы (I.72) и (I.73))

$$\varkappa_e = \varkappa_f \gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f), \quad \varkappa_f = \varkappa_e \gamma_{\parallel} (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e). \quad (85)$$

Преобразование направлений происходит в соответствии с законом аберрации (формула (I.78))

$$\varkappa_e \vec{n}_e = \varkappa_f \vec{n}_f + \varkappa_f \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 + (\gamma_{\parallel} - 1) \varkappa_f \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \vec{n}_f), \quad (86)$$

$$\varkappa_f \vec{n}_f = \varkappa_e \vec{n}_e - \varkappa_e \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 + (\gamma_{\parallel} - 1) \varkappa_e \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \vec{n}_e). \quad (87)$$

Проекция на направление вектора  $\vec{e}_1$  дает связь между синусами  $\varkappa_e \sin \theta_e = \varkappa_f \sin \theta_f$ , так что

$$\sin \theta_e = \frac{\sin \theta_f}{\gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)}, \quad \sin \theta_f = \frac{\sin \theta_e}{\gamma_{\parallel} (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e)}. \quad (88)$$

Соответствующие равенства для косинусов получаются из проекции соотношения (86) на орт  $\vec{e}_3$  или из основного тригонометрического тождества:

$$\cos \theta_e = \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f}, \quad \cos \theta_f = \frac{\cos \theta_e + \beta_{\parallel}}{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e}. \quad (89)$$

Взаимно обратные формулы (88)–(89), как и преобразование (85) частот, отличаются знаками перед  $\beta_{\parallel}$ . Азимутальный угол  $\phi$  во всех рассмотренных системах одинаков.

Прямым дифференцированием любого из двух соотношений (89) проверяется, что величины:  $\alpha^2 \sin \theta d\theta$ ,  $\alpha^2 \sin \theta d\theta d\phi = \alpha^2 d^2 n$ ,  $d\alpha/\alpha$  и  $d^3 \alpha/\alpha$ , — являются релятивистскими инвариантами. Выполняются равенства  $\alpha_e \sin \theta_e = \alpha_f \sin \theta_f$  и  $\alpha_e d\theta_e = \alpha_f d\theta_f$ , а также  $\sqrt{1 - \beta_{\parallel}} \operatorname{tg} \frac{\theta_e}{2} = \sqrt{1 + \beta_{\parallel}} \operatorname{tg} \frac{\theta_f}{2}$ .

6. *Спектр в системах поля.* В этом пункте получим формулы, описывающие спектр магнито-тормозного излучения в случае, когда электрон движется по спирали, т. е. в одной из систем поля. Для этого обобщим формулу (74). Проще всего обобщается выражение для аргумента бесселевых функций:

$$z = l\beta_{\perp}\gamma_{\parallel} \frac{\sin \theta_f}{\gamma_{\parallel}(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)} = l \frac{\beta_f \sin \alpha \sin \theta_f}{1 - \beta_f \cos \alpha \cos \theta_f} = l \frac{\beta_s}{\beta_c}, \quad (90)$$

где использованы обозначения (45). Не сложнее обобщается и выражение (75):  $\beta_{\parallel} = \beta_f \cos \alpha$ ,  $\beta_{\perp} = \beta_f \sin \alpha$ ,

$$w_l = \gamma_{\parallel}^2 \left[ \left( \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right]. \quad (91)$$

С произведенными обобщениями можно записать выражение для четырехмерного импульса, который несут фотоны в линии с номером  $l$  в элементе телесного угла  $d^2 n_f$  за период времени  $T_f$ :

$$d^2 \underline{P}_l^e = \frac{e^2 c}{\omega_e^2} l^2 \alpha_f^2 d^2 n_f \alpha_e w_l. \quad (92)$$

Выражение явно релятивистски ковариантно. Вместе с тем при переходе в лабораторную систему оно связывается с величиной  $W_l$ , определяемой формулой (74):

$$d^2 \underline{P}_l^e = \frac{e^2 c}{\omega_e^2} l^2 \alpha_e^2 d^2 n_e \alpha_e w_l = \frac{e^2 c}{\omega_e^2} l^2 \frac{\omega_e^3}{c^3} d^2 n_e \{1, \vec{n}_e\} w_l = \frac{\omega_e}{c} W_l \{1, \vec{n}_e\} d^2 n_e. \quad (93)$$

Появление лишних множителей  $\omega_e$  и  $c$  объясняется тем, что  $W_l$  — это не импульс, а энергия, причем рассчитанная на единицу частоты.

Общую формулу (92) также можно записать в виде, аналогичном (93):

$$d^2 \underline{P}_l^f = \frac{W_l^f}{c} \frac{\omega_f}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f} \{1, \vec{n}_f\} d^2 n_f, \quad (94)$$

где обобщение формулы (74)

$$W_l^f = \frac{e^2}{c} l^2 \frac{w_l}{\gamma_{\parallel}^2 (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)^2}. \quad (95)$$

Дополнительные множители в (94) объясняются тем же:  $W_l^f$  — это излучаемая энергия, рассчитанная на единицу излучаемой частоты (выделено расстояние между соседними линиями), а  $\underline{P}_l^f$  — это импульс за период  $T_f$ . Этот импульс, а не энергия  $W_l^f$ , является ковариантной величиной.

Подчеркнем, что  $\omega_e$  и  $\omega_f$  — это частоты обращения электрона в лабораторной системе и системе поля, а  $\vec{\alpha}_e$  и  $\vec{\alpha}_f$  — волновые векторы излучаемых фотонов в тех же системах отсчета. В первой из них выполняется соотношение  $\alpha_e = \omega_e/c$ , во второй же связь указанных величин более сложная, так как  $\omega_f = \omega_e/\gamma_{\parallel}$ , а волновые векторы связаны равенством (85). Поэтому частоты линий спектра излучения заряда, движущегося по окружности, одинаковы во всех направлениях и равны  $\omega_f^e = l\omega_e$ . Заряд, движущийся по спирали, излучает спектр, частоты которого зависят от направления на наблюдателя:

$$\omega_l^f = l\alpha_f = l \frac{c\alpha_e}{\gamma_{\parallel}\beta_c} = l \frac{\omega_f}{\beta_c} = l \frac{\omega_*}{\gamma_f\beta_c}. \quad (96)$$

Существенное отличие излучения при винтовом движении заряда от случая его плоского движения заключается также в следующем. Формула (92) определяет излучение за период. Однако период полного оборота

заряда  $T_f = 2\pi/\omega_f$  и наименьший период (при  $l = 1$ ), с которым приходят волны к наблюдателю в заданном направлении  $2\pi/(c\alpha_f) = T_f\beta_c$ , различаются. Второй из них при одинаковых знаках  $\cos \alpha$  и  $\cos \theta_f$  меньше первого, так что наблюдатель в единицу времени будет воспринимать большее количество энергии, чем излучает заряд. Никакого парадокса здесь нет, так как заряд, движущийся навстречу наблюдателю, сам как бы догоняет свое же излучение и спрессовывает его. Напротив, для наблюдателя, от которого заряд удаляется, излучение будет ослаблено, так что в среднем закон сохранения энергии, конечно, выполняется. Подробное объяснение всех этих эффектов содержится в книге В. Л. Гинзбурга [8].

Заметим, что для ультрарелятивистского заряда при не малых питч-углах  $\alpha$  множитель  $\beta_c = \sin^2 \alpha$ , так что частоты излучения, идущего в конусе наибольшей интенсивности,  $\omega_l^f = l \frac{\omega_f}{\sin^2 \alpha}$ , а частота прихода импульсов к наблюдателю в этом направлении больше частоты обращения заряда вокруг оси  $\omega_f/2\pi$  в  $1/\sin^2 \alpha$  раз.

Полное излучение движущегося по спирали электрона (во всех направлениях) в системах поля находится интегрированием выражения (94) с переходом от переменной  $\theta_f$  к  $\theta_e$  по приведенным выше формулам. При этом интегралы по азимуту, который одинаков во всех системах поля, от компонент вектора  $\vec{n}_f$  в плоскости, перпендикулярной полю, равны нулю, а временная компонента и параллельная полю от азимута не зависят, так что

$$\begin{aligned} \underline{P}_l &= \int d^2 \underline{P}_l^f = 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f l^2 \int_0^\pi \sin \theta_f d\theta_f \frac{\{1, 0, 0, \cos \theta_f\}}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)^3} \left[ \left( \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right] = \\ &= 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f l^2 \int_0^\pi \sin \theta_e d\theta_e \{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e, 0, 0, \cos \theta_e + \beta_{\parallel}\} [\operatorname{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z)] = \frac{\omega_e}{c} \{\gamma_{\parallel}, 0, 0, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel}\} \overline{W}_l. \end{aligned} \quad (97)$$

Полученное выражение представляет собой произведение скалярных множителей на четырехмерный безразмерный вектор скорости заряда вдоль поля, что соответствует излучению зарядом энергии и импульса в линии. Если просуммировать по номеру линии, то получится полный импульс, излучаемый зарядом за период:

$$P = \sum_{l=1}^{\infty} \underline{P}_l = 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_0^\pi \sin \theta_f d\theta_f \frac{\{1, 0, 0, \cos \theta_f\}}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)^3} \left[ \left( \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right] = \frac{\omega_e}{c} \{\gamma_{\parallel}, 0, 0, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel}\} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{W}_l. \quad (98)$$

7. *Мощность излучения в системах поля.* Умножение временной компоненты вектора импульса (98) на  $c\omega_f/2\pi$ , т. е. расчет энергии на единицу времени, превращает эту компоненту в скаляр, а именно, в разложение в спектр мощности излучения заряда  $I$ , величина которой определяется формулой (25):

$$I = \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta_f d\theta_f}{\beta_c^3} \left[ \left( \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right], \quad (99)$$

где  $z$  задается формулой (90). Эта операция равносильна делению на период обращения заряда, причем зависимость периода прихода фотонов к наблюдателю от направления на него не учитывается, так как получаемая мощность относится именно к заряду, что аналогично рассуждению при получении выражения (I.85). Покажем прямым вычислением справедливость этого разложения, т. е. равенство его (25).

В результате перехода к лабораторной системе отсчета или из временной компоненты (98) после подстановки формулы (81) получается

$$I = \frac{\omega_e^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{W}_l = 2 \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \beta_e J_{2l}'(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \right]. \quad (100)$$

Вычисление сумм приводит к равенству

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left[ \beta_e^2 \gamma_e^4 - \frac{\beta_e^2}{\gamma_e^2} \int_0^1 \frac{1 + \beta_e^2 y^2}{(1 - \beta_e^2 y^2)^4} y^2 dy \right] = \\ &= \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left[ \beta_e^2 \gamma_e^4 - \frac{1}{\gamma_e^2} (2I_{4,0}(\beta_e) - 3I_{3,0}(\beta_e) + I_{2,0}(\beta_e)) \right], \end{aligned} \quad (101)$$

окончательное выражение — второе в (25).

## § 4. Спектр синхротронного излучения

1. *Определения функций Бесселя.* Для вывода формул, описывающих спектр синхротронного излучения, приведем краткие сведения о бесселевых функциях.

Бесселева функция (первого рода) может быть определена сходящимся на всей комплексной плоскости рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (102)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Функция  $J_\nu(z)$  является решением уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0. \quad (103)$$

Число  $\nu$  называется порядком уравнения и функции.

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функции  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ , если только  $\nu$  не целое число. Второе линейно независимое решение (функция второго рода) представляют в виде следующей линейной комбинации указанных решений

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi \nu)}, \quad (104)$$

которую называют функцией Вебера или Неймана. Она остается линейно независимой от основной и при целых порядках.

Если в уравнении Бесселя (103) заменить переменную  $z$  на  $iz$ , то уравнение перейдет в

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0, \quad (105)$$

называемое модифицированным уравнением Бесселя. Соответствующие решения носят название модифицированных функций Бесселя. Одна из них — это просто функция Бесселя (основная) от аргумента, умноженного на мнимую единицу:

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(e^{i\pi/2} z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (106)$$

Опять, вторым решением при нецелых  $\nu$  может служить  $I_{-\nu}(z)$ . Более удобна другая функция, которую называют функцией Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi \nu)}. \quad (107)$$

Для нее справедливы рекуррентные соотношения

$$z[K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z)] = -\nu K_\nu(z), \quad 2K'_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z). \quad (108)$$

Непосредственно из представлений в виде рядов вытекают формулы, характеризующие поведение функций при  $z \rightarrow +0$ :

$$J_\nu(z) \sim I_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{2} \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu) \sin(\pi \nu)} = \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}. \quad (109)$$

При переходе к последнему выражению использована формула дополнения гамма-функции.

2. *Интегральные представления.* Функции Бесселя могут быть представлены в виде определенных интегралов, с помощью которых их удобно исследовать и вычислять. Представление для функции целого порядка

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} d\phi. \quad (110)$$

доказывается непосредственной выкладкой, при которой экспоненту надо разложить в ряд по степеням  $z$ . Аналогично представление модифицированной функции

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-z \sin \phi} \cos n \phi d\phi. \quad (111)$$

Для функции Макдональда справедливо представление

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt. \quad (112)$$

3. *Асимптотические формулы.* Получим асимптотику функции  $K_\nu(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  методом Лапласа. Для этого заменим в показателе экспоненты  $\operatorname{ch} t = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(t/2)$  и примем во внимание, что при больших аргументах  $z$  в интеграл дают вклад только малые значения  $t$ , так что

$$K_\nu(z) = e^{-z} \int_0^\infty e^{-2z \operatorname{sh}^2(t/2)} \operatorname{ch}(\nu t) dt \sim e^{-z} \int_0^\infty e^{-zt^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (113)$$

Особый интерес для нас представляет асимптотика функции  $J_\nu(z)$ , когда велики и аргумент  $z$  и порядок  $\nu$ , причем  $z \leq \nu$ :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{v}{u}} \frac{1}{\pi} K_{1/3}(\nu v), \quad (114)$$

где обозначено

$$u = \sqrt{1 - z^2/\nu^2}, \quad z = \nu \sqrt{1 - u^2}. \quad (115)$$

$$v = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u. \quad (116)$$

Для получения производной от функции Бесселя  $J'_\nu(z)$  достаточно продифференцировать асимптотическую формулу (114):

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{uv} K_{2/3}(\nu v). \quad (117)$$

4. *Направленное излучение в линиях.* Применим приведенные асимптотики к спектру синхротронного излучения. Сначала рассмотрим движение заряда по окружности ( $\alpha = \pi/2$ ).

Считается, что  $\beta_e \sim 1$ ,  $\gamma_e \gg 1$ . Излучение сосредоточено в узком конусе около плоскости вращения, поэтому целесообразно вместо угла  $\theta_e$  использовать угол  $\varepsilon = \pi/2 - \theta_e$ . Тогда основное излучение идет при малых значениях  $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_e \ll 1$ .

По аргументу бesselевых функций  $z = l\beta_e \sin \theta_e$  при больших  $l$  находим

$$u = \sqrt{1 - z^2/l^2} = \sqrt{1 - \beta_e^2 \sin^2 \theta_e} = \sqrt{1 - \beta_e^2 \cos^2 \varepsilon} = \sqrt{1 - \beta_e^2 + \beta_e^2 \sin^2 \varepsilon} \sim \sqrt{1/\gamma_e^2 + \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma_e} \ll 1. \quad (118)$$

Для малых  $u$  величина  $v \sim u^3/3 = (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_e^3$ . Следовательно,

$$J_l(z) \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\sqrt{3\pi}\gamma_e} K_{1/3} \left( l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_e^3 \right), \quad J'_l(z) \sim \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sqrt{3\pi}\gamma_e^2} K_{2/3} \left( l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_e^3 \right) \quad (119)$$

и ( $\operatorname{ctg} \theta_e = \operatorname{tg} \varepsilon \sim \varepsilon$ )

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} l^2 \frac{1 + \varepsilon_0^2}{3\pi^2 \gamma_e^4} \left[ \varepsilon_0^2 K_{1/3}^2 \left( l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_e^3 \right) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2 \left( l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_e^3 \right) \right]. \quad (120)$$

Рассмотрим предельные случаи. Обе величины  $l$  и  $\gamma_e$  большие.

1)  $l \ll 3\gamma_e^3$ . В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках в (120) больше первого, так как у него больше отрицательная степень малой величины. Согласно формуле для  $K_\nu(z)$  из (109)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} 3^{1/3} 2^{-2/3} \Gamma^2(2/3) \frac{l^{2/3}}{1 + \varepsilon_0^2}. \quad (121)$$

При таких  $l$  интенсивность не зависит от  $\gamma_e$  и растет пропорционально  $l^{2/3}$ . При этом производная по  $l$  бесконечна, то есть рост быстрый.

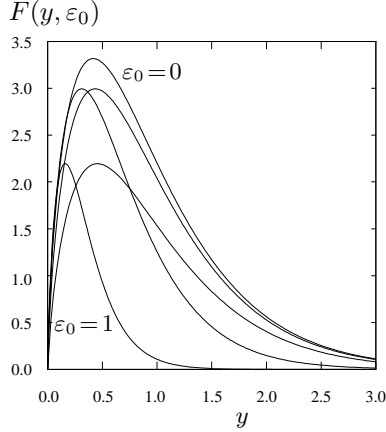
2)  $l \sim 3\gamma_e^3$ . Функции Макдональда порядка 1, а  $W_l$  пропорциональна  $l^2/\gamma_e^4 \sim 9\gamma_e^2$ .

3)  $l \gg 3\gamma_e^3$ . При таких номерах линий обе функции Макдональда убывают экспоненциально, так же убывает и  $W_l$ :

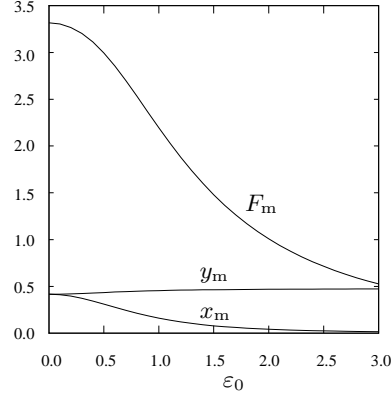
$$W_l \sim \frac{e^2}{c} \frac{1}{2\pi} \frac{l}{\gamma_e} \frac{1 + 2\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{1/2}} \exp \left( -\frac{2}{3} (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2} \frac{l}{\gamma_e^3} \right). \quad (122)$$

Интенсивность линий быстро возрастает с номером  $l$  до значений порядка  $3\gamma_e^2$ , образуя широкий максимум на номерах  $l$  порядка  $3\gamma_e^3$ , а затем экспоненциально убывает.

При формальной подстановке в формулу (120) значения  $\beta_e = 1$ , которое соответствует невозможной скорости заряда, равной скорости света (тогда  $\gamma_e = \infty$ ), рост этой функции продолжается неограниченно по формуле (121). При реальных скоростях, близких к скорости света, интенсивность линий быстро возрастает с номером  $l$ , как и при  $\beta_e = 1$ , до значений порядка  $3\gamma_e^2$ , образуя широкий максимум на номерах  $l \sim 3\gamma_e^3$ , а затем экспоненциально убывает.



**Рис. 7.** Графики функции  $F(y, \varepsilon_0)$  в зависимости от  $y$  и от  $x$  при  $\varepsilon_0 = 0, 1/2$  и  $1$ .



**Рис. 8.** Точки максимумов и максимальные значения функции  $F(y, \varepsilon_0)$  в зависимости от  $\varepsilon_0$ .

Введем функцию

$$F(y, \varepsilon_0) = 9 \frac{y^2}{1 + \varepsilon_0^2} [\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2(y) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2(y)], \quad y = l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma_e^2}. \quad (123)$$

Через эту функцию величина (120) выражается так:

$$W_l = \frac{e^2 \gamma_e^2}{c 3\pi^2} F(y, \varepsilon_0). \quad (124)$$

Множитель  $\gamma_e^2$  выделен для того, чтобы все максимумы функции  $F(y, \varepsilon_0)$  были одного порядка. На рис. 7 изображены графики этой функции в зависимости от  $y$  и от  $x = y/(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}$  для трех значений  $\varepsilon_0$ . Кривые, характеризующие зависимость от  $x$ , располагаются левее и быстрее сходятся к нулю (при  $\varepsilon_0 = 0$  кривые для  $y$  и для  $x$  совпадают). С ростом  $\varepsilon_0$  кривые понижаются. Величины максимумов  $F_m(\varepsilon_0) = F(y_m, \varepsilon_0)$ , а также их положения  $y_m$  и  $x_m$  отражает рис. 8. С ростом  $\varepsilon_0$  точки максимумов  $y_m$  незначительно возрастают (от 0.4169 при  $\varepsilon_0 = 0$  до 0.4761 при  $\varepsilon_0 = \infty$ ). Максимумы убывают от 3.3166 при  $\varepsilon_0 = 0$ , а при больших  $\varepsilon_0$  их значения  $F(y_m, \varepsilon_0) \sim 5.4791/\varepsilon_0^2$ . Точки максимумов по  $x$  с  $\varepsilon_0$  быстро убывают:  $x_m = y_m/(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}$ .

Таким образом, спектр синхротронного излучения имеет совершенно другой характер, чем спектр циклотронного. Синхротронное излучение распространяется в узком конусе вблизи плоскости, в которой вращается заряд. С ростом  $\gamma_e$  угол, в котором идет максимальное количество излучения, сужается, интенсивность спектра увеличивается. Излучение идет в линиях с большими номерами  $l \sim 3\gamma_e^3$  и, следовательно, на высоких частотах порядка  $l\omega_*/\gamma_e \sim 3\gamma_e^2\omega_*$ . При этом расстояние между линиями равно  $\omega_e = \omega_*/\gamma_e$ , так что линии располагаются все теснее. Так как вследствие излучения линии имеют конечную ширину (что мы не учитываем), то спектр синхротронного излучения фактически является непрерывным, близким по виду к тому, что изображено на рис. 7.

Гироциклотронное излучение является промежуточным между циклотронным и синхротронным, т. е. с ростом  $\beta_e$  неуклонно возрастает направленность излучения, убывание интенсивностей линий с номером в области сильного излучения постепенно сменяется возрастанием, а затем максимум перемещается в сторону все больших номеров.

5. *Полное излучение в линиях.* Проинтегрированная по направлениям интенсивность линий (81) при больших номерах имеет те же свойства, что и направленная. Здесь во внеинтегральном слагаемом  $u = \sqrt{1 - \beta_e^2} = 1/\gamma_e \ll 1$ ,  $v \sim u^3/3 = 1/3\gamma_e^3$  и согласно асимптотике (Б.117)

$$\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma_e^2} K_{2/3}(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma_e^3}. \quad (125)$$



Интеграл оценивается несколько сложнее. В нем сделаем замену

$$u' = \sqrt{1 - \beta_e^2 y^2}, v' = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u'}{1 - u'} - u', \quad (126)$$

$$dv' = \frac{u'^2 du'}{1 - u'^2} = -\beta_e^2 \frac{u' y dy}{1 - u'^2} = -\frac{\beta_e u' dy}{\sqrt{1 - u'^2}}, dy = -\frac{\sqrt{1 - u'^2} dv'}{\beta_e}. \quad (127)$$

Тогда после подстановки асимптотической формулы (Б.114)

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{\pi\beta_e} \int_{1/3\gamma_e^2}^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'}} K_{1/3}(2lv') \frac{\sqrt{1 - u'^2}}{u'} dv'. \quad (128)$$

После еще одной замены переменной интегрирования  $x' = 2lv'$  интеграл примет вид

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{2l\pi} \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'^3} (1 - u'^2)} K_{1/3}(x') dx', \quad (129)$$

Ввиду экспоненциального убывания функции Макдональда при больших аргументах основной вклад в интеграл вносят значения  $x$ , имеющие порядок 1 и меньше. Поэтому существенны значения  $v' = x/2l \ll 1$ . В этой области  $u' \ll 1$  и  $v' \sim u'^3/3$ , так что

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{2l\pi\sqrt{3}} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx'. \quad (130)$$

Подставив оценки двух слагаемых в формулу (81), получим

$$\bar{W}_l \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e^2}{c} \frac{l}{\gamma_e^2} \left[ K_{2/3}(x) - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (131)$$

Наконец, воспользуемся рекуррентным соотношением для функций Макдональда (108), из которого следует, что

$$\int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' = 2K_{2/3}(x) - \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx', \quad (132)$$

и получим окончательное выражение

$$\bar{W}_l \sim \frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma_e f_W(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma_e^3}, \quad (133)$$

где использовано обозначение для функции, отражающей зависимость интенсивности излучения от номера линии и лоренцевского множителя:

$$f_W(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx'. \quad (134)$$

Интеграл от этой функции

$$\int_0^{\infty} f_W(x) dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \quad (135)$$

Часто используется также функция, интеграл от которой равен 1:  $f_W^*(x) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} f_W(x)$ .

При достаточно малых  $x$  функция разлагается в степенной ряд

$$f_W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} x \left[ \left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n - 2/3) (n - 1/3)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{8/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n + 8/3) (n + 4/3)} - 1 \right] \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{2^{5/3}}{\Gamma(1/3)} x^{1/3}. \quad (136)$$

Она круто возрастает, достигая максимума 0.91801 при  $x = 0.28581$ . Напротив, при больших  $x$  справедливо асимптотическое разложение

$$f_W(x) \sim \sqrt{\frac{x\pi}{2}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^n} \sum_{m=0}^n \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{9} \right]}{m!(2m-1)!!}, \quad (137)$$

из которого видно ее экспоненциальное убывание. Все это отражается на рис. 9.

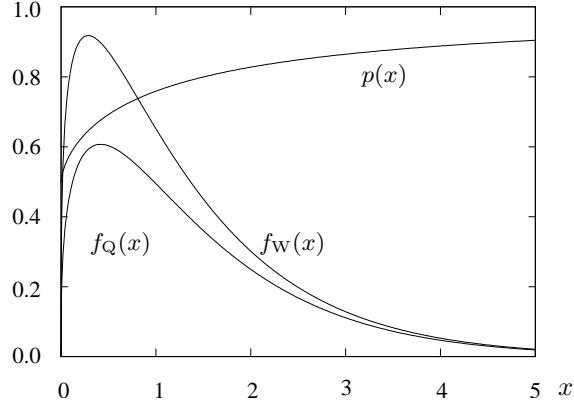


Рис. 9. Графики функций  $f_W(x)$ ,  $f_Q(x)$  и  $p(x)$ .

Оценим, насколько быстро устанавливается предельный режим полного излучения. Для этого сравним точки  $l_m$  и наибольшие значения функций  $\overline{W}_m = \overline{W}_{l_m}(\beta_e)/(4\pi e^2/c)$ , графики которых приведены на рис. 5, дополнив их соответствующими еще несколькими значениями  $\beta_e$ , с предельными:  $l_m^{\text{lim}} = 3\gamma_e^3 \cdot 0.28581$  и  $\overline{W}_m^{\text{lim}} = \overline{W}_{l_m}(\beta_e)/(4\pi e^2/c) = \sqrt{3}\gamma_e \cdot 0.91801$ . Результат сравнения приведен в таблице, из которой видно, что уже при  $\gamma_e = 7$  максимумы близки к предельным. Эта близость наступала бы еще раньше, если бы находились не наибольшие значения точной функции, т. е. не в целых числах номеров линий  $l$ , а, как и у предельной функции, точки максимумов, когда  $l$  считается непрерывной переменной.

Таблица. Точки и значения максимумов полного излучения

$\beta_e$	$\gamma_e$	$l_m$	$l_m^{\text{lim}}$	$\overline{W}_m$	$\overline{W}_m^{\text{lim}}$
0.80	1.67	2	1.98	0.175	0.211
0.85	1.90	3	2.93	0.209	0.240
0.90	2.29	5	5.18	0.264	0.290
0.925	2.63	8	7.82	0.311	0.333
0.94	2.93	11	10.80	0.351	0.371
0.95	3.20	14	14.08	0.387	0.405
0.96	3.57	19	19.53	0.436	0.452
0.965	3.81	24	23.78	0.467	0.482
0.97	4.11	30	29.84	0.506	0.520
0.975	4.50	39	39.08	0.557	0.569
0.98	5.03	54	54.40	0.624	0.636
0.99	7.09	152	152.72	0.889	0.897

Несложно найти среднюю степень безразмерной частоты этого распределения, воспользовавшись интегралом 2.16.2.2. справочника [47]:

$$\int_0^{\infty} x^\mu K_\nu(x) dx = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right). \quad (138)$$

Функция Макдональда четна по индексу  $\nu$ , тем же свойством обладает интеграл от нее. Переставив порядок интегрирований, получим

$$\overline{x^\mu} = \int_0^{\infty} x^\mu f_W^*(x) dx = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^{\infty} K_{5/3}(x') dx' \frac{x'^{\mu+2}}{\mu+2} = \frac{9\sqrt{3}}{\pi} \frac{2^{\mu-2}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{3\mu+14}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+4}{6}\right). \quad (139)$$

Соответственно средняя частота  $\bar{x} = 55\sqrt{3}/72 = 1.3231$ , корень из среднего квадрата  $\sqrt{\bar{x}^2} = 2\sqrt{7}/3 = 1.7638$ , дисперсия  $Dx = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = 1.3605$ , среднеквадратичное отклонение от средней частоты  $\sqrt{Dx} = 1.1664$ . Все средние в несколько раз больше точки максимума, который достигается очень быстро.

Точно так же выводится выражение для параметра Стокса в линии. При этом поскольку первые два слагаемых в скобках в формуле (82) для  $\bar{Q}_l$  совпадают со стоящими в выражении (81) для  $\bar{W}_l$ , то оценить остается последний интеграл. При оценке интеграла можно считать, что  $y = \sqrt{1 - u'^2}/\beta_e \sim 1$ , а

$$1 - y = \frac{\beta_e - \sqrt{1 - u'^2}}{\beta_e} = \frac{\beta_e^2 - 1 + u'^2}{\beta_e(\beta_e + \sqrt{1 - u'^2})} \sim \frac{u'^2 - 1/\gamma_e^2}{2} \sim \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{2l} x' \right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma_e^2} \right]. \quad (140)$$

Таким образом, интеграл распадается на два, причем первый вычисляется (формулы 6.561.12 и 16 справочника [10]):

$$2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) \frac{1-y}{y} dy \sim \frac{2l}{4l\pi\sqrt{3}} \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \left[ \left( \frac{3}{2l} x' \right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma_e^2} \right] = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\gamma_e^2} \left[ K_{2/3}(x) - \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (141)$$

В результате интегралы сокращаются и остается только функция Макдональда:

$$\bar{Q}_l = -\frac{e^2}{c} \frac{2l}{\gamma_e^2 \sqrt{3}} K_{2/3}(x) = -\frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma_e f_Q(x), \quad f_Q(x) = x K_{2/3}(x). \quad (142)$$

Интеграл от функции  $f_Q(x)$  по всем  $x$  равен  $2\pi/3\sqrt{3}$ , в  $4/3$  раза меньше, чем от  $f_W$ . График функции  $f_Q(x)$  также представлен на том же рис. 9. Там же помещено отношение двух функций, представляющее степень линейной поляризации синхротронного излучения в потоке:  $p(x) = f_Q(x)/f_W(x)$ . В частности,  $p(0) = 0.5$ ,  $p(\infty) = 1$ .

3. *Излучение в линиях в системе поля.* Асимптотические формулы для этого случая пишутся аналогично написанным выше. Здесь ограничимся собственно синхротронным излучением, когда питч-угол (угол между направлением скорости электрона и магнитным полем)  $\alpha$  не мал.

Для вывода асимптотического представления излучения в линиях при  $\gamma_f \gg 1$  будем исходить из выражения для полной мощности (99). Не переходя в лабораторную систему, положим  $\theta_f = \alpha + \varepsilon_0/\gamma_f$ . Затем воспользуемся асимптотиками (50) и (51), а также асимптотиками бесселевой функции (Б.114) и ее производной (Б.117). При  $\beta_f \sim 1$ ,  $\gamma_f \gg 1$  аргумент функций Бесселя  $z = l \frac{\beta_s}{\beta_c}$ , так что согласно формуле (Б.115)  $u = \sqrt{1 - z^2/l^2} =$

$$= \sqrt{1 - \beta_s^2/\beta_c^2} = \frac{\sqrt{\beta_c^2 - \beta_s^2}}{\beta_c} \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2} \sin \alpha}{\gamma_f \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma_f \sin \alpha}. \quad (143)$$

Эта величина мала, поэтому  $v_+ \sim u^3/3 \sim (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_f^3 \sin^3 \alpha$ .

Поскольку основное излучение идет в коническом слое около конуса с углом раствора  $\alpha$ , интеграл по углу можно заменить на интеграл по  $\varepsilon_0$ , распространив его на всю вещественную ось. Принимая во внимание, что  $(\cos \theta_f - \beta_{||})/\sin \theta_f \sim -\varepsilon_0/\gamma_f$ , а  $\beta_{\perp} \sim \sin \alpha$ , находим

$$I \sim \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha d\varepsilon_0}{\gamma_f \sin^6 \alpha} \frac{1}{3\pi^2} \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{\gamma_f^4} \left[ \varepsilon_0^2 K_{1/3}^2(y) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2(y) \right]. \quad (144)$$

Аргументом функций Макдональда служит произведение  $lv_+$ . Его мы перепишем так, чтобы он содержал излучаемую частоту, определяемую формулой (96). Дело в том, что наблюдатель измеряет интенсивность на определенной частоте и ему нет дела до того, какому номеру линии она соответствует. Кроме того, на различных направлениях скорости заряда, вообще говоря, одной и той же частоте соответствуют различные номера линий. Поэтому закрепим именно частоту излучения.

В асимптотической ( $\gamma_f \gg 1$ ) области при немалых питч-углах частоты не зависят от направления излучения, но зависят от питч-угла, под которым идет и все излучение, так как согласно формулам (96) и (50)

$$\omega = \omega_l \sim l \frac{\omega_f}{\sin^2 \alpha}, \quad l = \frac{\omega_l}{\omega_f} \sin^2 \alpha. \quad (145)$$

Тогда аргумент функций Макдональда

$$y = lv_+ \sim l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma_f^3 \sin^3 \alpha} = \frac{x}{2} (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}, \quad x = \frac{\omega_l}{\omega_c}, \quad (146)$$

где

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma_f^2\omega_* \sin \alpha = \frac{3}{2}\gamma_f^2\frac{e\mathcal{H}_*}{mc} \sin \alpha = \frac{3}{2}\gamma_f^2\frac{e\mathcal{H}_\perp}{mc}. \quad (147)$$

Через  $\mathcal{H}_\perp = \mathcal{H}_* \sin \alpha$  обозначена проекция напряженности внешнего магнитного поля на плоскость, перпендикулярную скорости электрона. Часто используется не круговая, а обычная частота, тогда  $\omega_l/\omega_c = \nu_l/\nu_c$ , где  $\nu_c = \omega_c/2\pi$ .

Как видно из формулы (144), для дальнейшего вычисления требуются два интеграла ( $y = x(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/2$ )

$$A_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_0 \varepsilon_0^2 (1 + \varepsilon_0^2) K_{1/3}^2(y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' - K_{2/3}(x) \right], \quad (148)$$

$$A_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_0^2)^2 K_{2/3}^2(y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}x} \left[ \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' + K_{2/3}(x) \right]. \quad (149)$$

Воспользовавшись ими, найдем

$$I \sim \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \frac{1}{\gamma_f^5 \sin^7 \alpha} \frac{2\pi}{\sqrt{3}x} \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx'. \quad (150)$$

Нижний предел полученного интеграла связан с переменной суммирования:

$$x = \frac{2}{3} \frac{l}{\gamma_f^3 \sin^3 \alpha}, \quad l = \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha x. \quad (151)$$

Вследствие большой величины множителя  $\gamma_f^3 \sin^3 \alpha$  изменению  $l$  на единицу ( $dl = 1$ ) отвечает очень малое изменение  $x$ , поэтому можно суммирование заменить интегрированием и положить

$$dl = 1 = \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha dx. \quad (152)$$

Тогда выражение (150) будет содержать уже встречавшуюся функцию и вычисляется:

$$I \sim \frac{e^2}{c} \frac{\omega_f^2}{3\pi^2} \frac{1}{\gamma_f^5 \sin^7 \alpha} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{9}{4} \gamma_f^6 \sin^6 \alpha x^2 \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha \frac{dx}{x} \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' = \frac{e^2}{c} \frac{\omega_f^2}{\pi} \frac{3\sqrt{3}}{4} \gamma_f^4 \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} f_W(x) dx = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \gamma_f^4 \sin^2 \alpha. \quad (153)$$

Здесь мы воспользовались интегралом (135). Результат совпадает с точным выражением (25) с учетом того, что  $\beta_f \sim 1$ .

Полученное выражение для полной мощности излучения позволяет найти спектральную мощность излучения, т. е. энергию, излучаемую зарядом с энергией  $mc^2\gamma$  на единичном интервале частоты  $\omega$  в единицу времени. Для этого перейдем в интеграле (153) от переменной интегрирования  $x$  к частоте  $\omega = x\omega_c$ ,  $dx = d\omega/\omega_c$ . Тогда подынтегральная функция и будет равна искомой величине:

$$\mathcal{E}(\omega, \gamma_f) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \sin \alpha f_W(x). \quad (154)$$

Конечно, из (154) можно было бы получить и выражение для случая движения заряда по окружности, но мы предпочли использовать для этого случая другой, более непосредственный способ вывода.

Поскольку почти все излучение заряда идет в направлении движения заряда, точнее в узком конусном слое около конуса с углом раствора, равным питч-углу  $\alpha$ , излучение такого заряда будет видеть только наблюдатель, направление на которого составляет с магнитным полем именно этот угол.

Мы здесь рассматривали случай, когда питч-угол не мал. Если же это не так и  $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$ , то частота излучения  $\omega_f^i = 2l \frac{\omega_*}{\beta_c^0} \gamma_f$  велика. При этом величины  $u = \sqrt{1 - \beta_s^2/\beta_c^2} = \sqrt{1 - (\beta_s^0/\beta_c^0)^2}$  и  $v$  конечны. Заметим, что частота остается конечной и при  $\alpha_0 = 0$ , однако интенсивности линий оказываются равными нулю.

4. *Усреднение по распределению энергий электронов.* Обычно считается, что распределение электронов по скоростям в системе отсчета источника, о которой говорилось в §1, изотропно и зависит только от модуля скорости (либо импульса) или, что то же самое, от энергии. Принято также считать, что в релятивистских

астрофизических объектах, таких как джеты активных ядер галактик, рентгеновские источники и др., распределение по энергиям не максвелловское, а степенное, т. е. (здесь  $p$  — число, а не импульс)

$$\mathcal{N}_e(\gamma) = \mathcal{C}(p)\gamma^{-p}, \quad \gamma_m \leq \gamma \leq \gamma_M. \quad (155)$$

Принимается, что даже нижняя граница не мала, обычно  $\gamma_m \geq 10$ . Коэффициент  $\mathcal{C}(p)$  определяется условием нормировки распределения:

$$\mathcal{C}(p) \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma = 1, \quad \mathcal{C}(p) = \frac{1-p}{\gamma_M^{1-p} - \gamma_m^{1-p}}. \quad (156)$$

Для  $p = 1$  необходимо произвести предельный переход.

Наблюдатель фактически воспринимает излучение только тех электронов из ансамбля, которые движутся в его сторону в узком конусе, о чем говорилось в предыдущем пункте. Можно считать, что пич-угол излучающих электронов совпадает с углом между направлением на наблюдателя и магнитным полем. С другой стороны, в указанном конусе идет практически вся излучаемая энергия и она попадает в прибор, разрешение которого, как правило, меньше толщины конусного слоя. Поэтому в качестве энергии, излучаемой ансамблем электронов, можно принять величину (154), усредненную по распределению электронов (155):

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \sin \alpha \mathcal{C}(p) \mathcal{I}_W(p), \quad \mathcal{I}_W(p) = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma f_W(x). \quad (157)$$

Вычислим входящий в формулу (157) интеграл. Сначала подставим в него выражение (134) для функции  $f_W(x)$  и сделаем замену переменной интегрирования  $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2\omega}{3\omega_\perp} \gamma^{-2}$ ,  $\gamma = \sqrt{\frac{2\omega}{3\omega_\perp}} x^{-1/2}$ , где обозначено  $\omega_\perp = \omega_* \sin \alpha$ . Получится

$$\mathcal{I}_W(p) = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx' = \frac{1}{2} \int_{2\omega/(3\omega_\perp \gamma_M^2)}^{2\omega/(3\omega_\perp \gamma_m^2)} \left( \frac{3\omega_\perp}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} x^{p/2} x^{-3/2} dx x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx'. \quad (158)$$

Для простоты заменим нижний предел внешнего интеграла на 0, а верхний на  $\infty$ . Поскольку получающийся интеграл сходится, добавление к нему интегралов по небольшим кусочкам  $[0, 2\omega/(3\omega_\perp \gamma_M^2)]$  и  $[2\omega/(3\omega_\perp \gamma_m^2), \infty)$  не должно существенно отразиться на его величине.

Переставим в (158) порядок интегрирования и вычислим внутренний степенной интеграл:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_W(p) &= \frac{1}{2} \left( \frac{3\omega_\perp}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty x^{p/2} x^{-3/2} dx x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx' = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3\omega_\perp}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty K_{5/3}(x') dx' \int_0^{x'} x^{(p-1)/2} dx = \frac{1}{p+1} \left( \frac{3\omega_\perp}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty x^{(p+1)/2} K_{5/3}(x) dx. \end{aligned} \quad (159)$$

Воспользовавшись интегралом (138), из последнего выражения в (159) получим оцениваемый интеграл при  $p > 1/3$

$$\mathcal{I}_W(p) = \frac{1}{p+1} \left( \frac{3\omega_\perp}{\omega} \right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \quad (160)$$

и окончательное выражение для излучаемой энергии

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_\perp \frac{\mathcal{C}(p)}{p+1} \left( \frac{3\omega_\perp}{\omega} \right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right). \quad (161)$$

5. *Усреднение по направлениям поля.* Полученное выражение представляет собой энергию, излучаемую ансамблем электронов в направлении на наблюдателя, составляющем угол  $\alpha$  с направлением напряженности магнитного поля, которое считается фиксированным. Однако, как правило, приборы не разрешают отдельных частей излучающих областей как в картинной плоскости, так и по лучу зрения. В прибор попадает излучение различных участков таких областей. Направление поля в их пределах может меняться произвольным и

не известным нам образом. Поэтому часто принимают предположение, что поле хаотично, т. е. его направления равномерно распределены по единичной сфере. Тогда полученное выражение для излучаемой энергии надо усреднить по углам  $\alpha$ . При этом возникает сходящийся при  $p > -5$  интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^{(p+3)/2} \alpha \, d\alpha = \int_0^1 y^{(p+3)/2} (1-y^2)^{-1/2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (162)$$

Несмотря на то, что усредняемая формула несправедлива при малыхpitch-углах, результат усреднения верен, так как вклад области таких углов незначителен.

После усреднения (161) по направлениям поля с учетом интеграла (162) находим

$$\bar{\bar{\mathcal{E}}}(\omega) = \mathcal{A}(p) \frac{e^2 \omega_*}{c} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{(p-1)/2}, \quad (163)$$

где зависящая от показателя  $p$  постоянная

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 3^{p/2} \frac{\mathcal{C}(p)}{p+1} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (164)$$

Коэффициент  $\mathcal{A}(p)$  стремится к бесконечности при  $p \rightarrow 1/3$ , но при  $p \geq 1$  его часть, не зависящая от границ распределения (155), т. е. от нормировочного коэффициента  $\mathcal{C}(p)$ , как видно из рис. 10, изменяется не сильно (смысл других кривых разъясняется ниже).

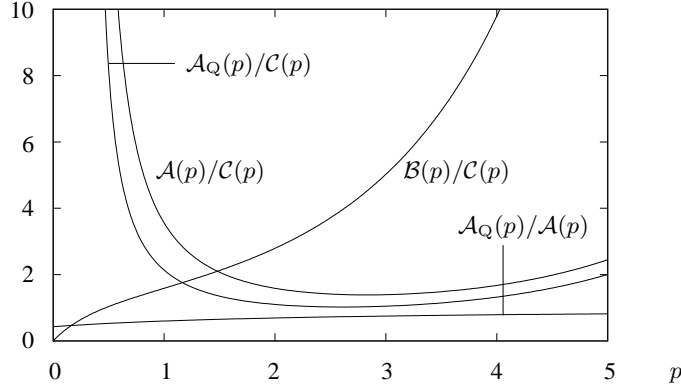


Рис. 10. Значения отношений  $\frac{\mathcal{A}(p)}{\mathcal{C}(p)}$ ,  $\frac{\mathcal{B}(p)}{\mathcal{C}(p)}$ ,  $\frac{\mathcal{A}_Q(p)}{\mathcal{C}(p)}$  и  $\frac{\mathcal{A}_Q(p)}{\mathcal{A}(p)}$ .

Именно выражение (163) обычно используется при интерпретации наблюдений. По наклону наблюдаемого спектра сразу определяется показатель распределения электронов по энергиям.

7. *Поляризация в системах поля.* В отношении параметра линейной поляризации можно проделать те же преобразования, что и с параметром интенсивности. Например, совершенно аналогичен вывод формул для них в системе поля. Сравнение формул для интенсивности (133) и (154) позволяет, исходя из равенства (142), без дополнительных выкладок написать выражение для параметра в системе поля:

$$\mathcal{Q}(\omega, \gamma_f) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \sin \alpha f_Q(x). \quad (165)$$

Усреднение по распределению электронов дает

$$\bar{\bar{\mathcal{Q}}}(\omega) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_\perp \frac{\mathcal{C}(p)}{4} \left(\frac{3\omega_\perp}{\omega}\right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right). \quad (166)$$

Усреднение по направлениям поля приводит точно к такому же интегралу, что и для интенсивности. В результате находим

$$\bar{\bar{\mathcal{Q}}}(\omega) = -\mathcal{A}_Q(p) \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{(p-1)/2}, \quad (167)$$

где численный коэффициент

$$A_Q(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 3^{p/2} \frac{C(p)}{4} \Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (168)$$

Таким образом, частотная зависимость параметра линейной поляризации точно та же, что и у параметра интенсивности. Их отношение, представляющее степень линейной поляризации, зависит только от индекса  $p$ :

$$\frac{A_Q(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)} = \frac{p+1}{p+7/3}. \quad (169)$$

Графики коэффициента  $A_Q(p)/C(p)$  и степени поляризации также представлены на рисунке. Интересно отметить, что степень поляризации, выражаемая такой простой формулой, имеет смысл и при тех значениях индекса  $p$ , при которых сами параметры Стокса неопределены, так как сингулярные множители у них одинаковы и сокращаются. Степень поляризации при этом изменяется в пределах от  $3/7$  при  $p = 0$  до  $1$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Заметим, что  $\overline{Q}_l$  — проинтегрированный по направлениям параметр линейной поляризации в линии  $Q_l$  (формула (142)), своего рода “интегральная” поляризация, в полном (по всем направлениям) излучении. Так же следует воспринимать и параметр, усредненный по распределению энергий электронов (166) и по направлениям поля (167). Однако при таких усреднениях для синхротронного излучения, считается, что все излучение идет в направлении на наблюдателя, поэтому и “интегральная” поляризация характеризует это, полное излучение.

Магнито-тормозной механизм и, в частности, синхротронное излучение играют очень большую роль в астрофизике, на что было обращено внимание И. С. Шкловским [57]. Изучению этого механизма было посвящено огромное число статей и ряд книг. Изложение в этих лекциях следует, в основном, книгам [29] и [8], а также обзору [70].

В сильном магнитном поле электроны движутся фактически почти вдоль силовых линий поля с небольшими отклонениями. При этом также возникает излучение, которое по-английски называется *curvature radiation*, а в русскоязычной научной литературе — изгибным или магнитодрейфовым.

Если же поле настолько сильно, что необходимо учитывать квантовые эффекты, то электрон нельзя считать свободным, его энергия квантуется (уровни Ландау), а излучение содержит резонансы на определенных частотах.

# Глава V. Черенковское и переходное излучение

## § 1. Движение заряда в диэлектрике и его наблюдение

1. *Заряд в диэлектрике.* Излучение Черенкова, то есть свечение заряда, движущегося в диэлектрике, было открыто аспирантом С. И. Вавилова П. А. Черенковым в 1934 г. Почти сразу же И. Е. Таммом и И. М. Франком была построена теория этого свечения. В 1958 г. им троим была присуждена Нобелевская премия по физике, так как эффект получил широкое применение в счетчиках фотонов.

Как известно, равномерно движущийся заряд не излучает. Однако, если скорость заряда в диэлектрике превышает скорость света в этом диэлектрике, то возникает некоторое излучение — электромагнитная волна, аналогичная килевой волне корабля, идущего быстрее скорости распространения волн в воде, или ударной волне в воздухе от самолета, летящего быстрее скорости звука. Здесь дается краткое описание механизма свечения Черенкова.

Пусть в диэлектрике показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$ . Будем считать, что диэлектрик однороден, то есть  $\varepsilon = n^2 = \text{const}$ . Тогда скорость света в такой среде  $c_1 = c/n < c$ . Пусть электрон (заряд  $-e$ ) движется с постоянной скоростью  $v$ , такой, что  $c_1 < v < c$ . Тогда плотности его заряда и тока будут

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}. \quad (1)$$

Примем для простоты, что скорость электрона направлена вдоль оси  $z$ , то есть  $\vec{v} = v(0, 0, 1)$ . Потерями энергии на излучение пренебрегаем, то есть считаем, что кто-то тянет электрон “за веревочку”. Найдем излучение такого заряда. Начнем с потенциалов.

2. *Потенциалы.* Потенциалы определяются обычными неоднородными волновыми уравнениями

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \left( \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку  $\vec{v}$  и  $n$  постоянны, то достаточно найти скалярный потенциал, ибо прямой подстановкой легко проверить, что

$$\vec{A} = \frac{n^2}{c} \varphi \vec{v}. \quad (3)$$

Ввиду осевой симметрии достаточно найти потенциалы в плоскости  $xz$ . Возьмем точку наблюдения  $\vec{r} = (x, 0, z)$ , причем можно ограничиться рассмотрением  $x > 0$  и  $z > 0$ . Запаздывающий потенциал дается формулой

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (4)$$

При этом, как обычно, должно выполняться соотношение

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = c_1 (t - t_1), \quad (5)$$

выражающее тот факт, что влияние заряда на точку наблюдения распространяется с конечной скоростью  $c_1$ , следовательно в момент времени  $t$  на точку  $\vec{r}$  окажет влияние состояние плотности заряда в точке  $\vec{r}_1$  в момент времени  $t_1$ .

Для точечного заряда общая формула (4) переписется в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{e}{n^2} \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{v}t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad (6)$$

а соотношение (5) перейдет в

$$|\vec{r} - \vec{v}t_1| = c_1 (t - t_1). \quad (7)$$

Потенциалы излучения Черенкова находятся аналогично потенциалам Лиенара—Вихерта. Мы получим выражения для потенциалов неформальным способом, отказавшись от точечности заряда. Пусть его протяженность равна  $a$ . Вклад в интеграл (4) дают точки  $\vec{r}_1$ , в которых в момент  $t_1$  находится наш заряд. При закрепленных  $t_1$  уравнение (5) описывает сферы радиуса  $c_1 (t - t_1)$  — сферы влияния. Чем дальше  $t_1 < t$  от  $t$ , тем больше радиус сферы, с возрастанием  $t_1$  радиус уменьшается и при  $t_1 = t$  сфера стягивается в точку, то есть схема



рассуждений та же, что и при выводе формул для обычных потенциалов точечного заряда. Однако, имеются существенные отличия, поэтому рассмотрим подробно кинематику процесса.

3. *Моменты влияния.* Введем обозначения

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t, \quad \vec{X}_1 = \vec{r} - \vec{v}t_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1). \quad (8)$$

Тогда (7) можно переписать так

$$|\vec{X}_1| = |\vec{X} + \vec{v}(t - t_1)| = c_1(t - t_1). \quad (9)$$

Возведя (9) в квадрат и разрешив результат относительно  $t - t_1$ , получим

$$t - t_1^\pm = \frac{-(\vec{X}\vec{v}) \pm Y}{v^2 - c_1^2}, \quad (10)$$

где

$$Y^2 = (\vec{X}\vec{v})^2 - (v^2 - c_1^2)X^2. \quad (11)$$

При  $v < c_1$  величина  $Y$  всегда вещественна, так как (11) есть сумма двух неотрицательных слагаемых. В этом случае момент влияния только один  $t_1^+$ , а излучения у равномерно движущегося заряда, как уже говорилось, нет.

Для нас представляет интерес случай  $v > c_1$ , тогда  $Y$  вещественно не при всех  $t$ . Найдем, при каких  $t$  эта величина вещественна. Ясно, что должно быть  $\vec{X}\vec{v} < 0$ , так как иначе за счет внекоренного слагаемого будет  $t - t_1 < 0$ , а требуется, чтобы было  $t - t_1 > 0$ , ибо причина должна предшествовать следствию.

4. *Конус Черенкова.* Положим  $\vec{X}\vec{v} = Xv \cos \alpha$ . Тогда условие вещественности  $Y$  запишется так:

$$Y^2 = X^2 v^2 \cos^2 \alpha - (v^2 - c_1^2)X^2 = X^2 v^2 (c_1^2/v^2 - \sin^2 \alpha) \geq 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что условие выполняется при  $\sin^2 \alpha \leq c_1^2/v^2$  или

$$\sin \alpha \leq c_1/v = \sin \alpha_0. \quad (13)$$

Так как угол  $\alpha$  тупой, то он должен удовлетворять условию

$$\pi \geq \alpha \geq \pi - \alpha_0. \quad (14)$$

Граничное значение угла между векторами  $\vec{X}$  и  $\vec{v}$  определяется острым углом  $\alpha_0$ , причем

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = c_1/\sqrt{v^2 - c_1^2}, \quad \alpha_0 = \arcsin \frac{c_1}{v}. \quad (15)$$

Конус (14) называется конусом Черенкова. Все излучение заряда находится внутри этого конуса.

Приняв во внимание, что

$$\vec{X} = (x, 0, z - vt), \quad (16)$$

найдем

$$\cos \alpha = \frac{z - vt}{\sqrt{x^2 + (z - vt)^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z - vt)^2}}. \quad (17)$$

Так как косинус отрицателен, то  $vt > z$  — заряд ушел дальше точки наблюдения. Подставив выражение для синуса из (17) в неравенство (13), получим

$$c_1(vt - z) \geq \sqrt{v^2 - c_1^2}x \quad (18)$$

и как следствие оценку снизу времени наблюдения излучения:

$$t \geq t^* = \frac{z}{v} + \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{v c_1}x. \quad (19)$$

Как следует из (10), имеется два момента влияния заряда на точку наблюдения. Они обозначены  $t_1^\pm$ , причем знаки берутся в соответствии со знаками перед корнем в (10), так что  $t - t_1^+ > t - t_1^-$ ,  $t_1^+ < t_1^-$ .

Для нахождения выражений для потенциалов нужно знать проекции скорости заряда на направление на наблюдателя, то есть направление излучения в моменты влияния.

5. *Проекция скорости на направление излучения.* Обозначим величину этой проекции через

$$v_x^\pm = \vec{v} \frac{\vec{X}_1^\pm}{X_1^\pm}, \quad \vec{X}_1^\pm = \vec{X} - \vec{v} \frac{\vec{X} \vec{v} \mp Y}{v^2 - c_1^2}, \quad (20)$$

а также введем вспомогательные величины ( $y$  — не координата)

$$y = \frac{vt - z}{x}, \quad q = \frac{v}{c_1}, \quad f = \sqrt{y^2 - (q^2 - 1)}. \quad (21)$$

В этих обозначениях использованные нами ранее величины выражаются следующим образом:

$$\vec{v} \vec{X} = -xyv, \quad Y = c_1 x f, \quad t - t_1^\pm = \frac{x q y \pm f}{c_1 q^2 - 1}, \quad (22)$$

$$\vec{v} \vec{X}_1^\pm = \frac{xv}{q^2 - 1} (y \pm qf). \quad (23)$$

Кроме того, из (16) и (9) получаем

$$X^2 = x^2 (1 + y^2), \quad \frac{1}{X_1^\pm} = \frac{1}{c_1 (t - t_1^\pm)} = \frac{qy \mp f}{x(y^2 + 1)}. \quad (24)$$

Из (18) вытекает, что  $y \geq \sqrt{q^2 - 1}$ . Принимая во внимание выписанные соотношения, находим

$$v_x^\pm = \frac{xv}{q^2 - 1} (y \pm qf) \frac{qy \mp f}{x(y^2 + 1)} = v \frac{q \pm yf}{y^2 + 1}. \quad (25)$$

Для определения знака проекций скорости  $v_x^\pm$  достаточно выражения (23), однако проще исходить из выражения (25). Проекция  $v_x^+$  при всех  $t$  больше  $c_1$ . Проекция же во второй момент пересечения обращается в нуль при  $y = q$ , при  $y < q$  она положительна, при  $y > q$  — отрицательна. Величина  $y$  при фиксированных  $z$  и  $x$  напрямую связана со временем наблюдения.

Таким образом, картина прохождения заряда через сферу влияния такова. До  $t < t^*$ , соответствующего  $y = y^* = \sqrt{q^2 - 1}$ , излучения нет. Когда  $t$  достигает значения  $t^*$ , заряд в единый момент  $t_1^+ = t_1^-$  лишь касается сферы влияния. В этот момент  $v_x^\pm = c_1$ . Если момент наблюдения  $t > t^*$  проекция  $v_x^+ > c_1$ , то есть в момент первого пересечения заряд всегда догоняет сферу влияния. После этого заряд некоторое время находится внутри сферы. В момент второго пересечения при  $\sqrt{q^2 - 1} < y < q$ , то есть при  $t^* < t < t_0 = z/v + x/c_1$  проекция скорости заключена в пределах  $c_1 > v_x^- > 0$ , так что сфера догоняет заряд. При  $t > t_0$  проекция  $v_x^- < 0$ . Это означает, что заряд и сфера движутся навстречу друг другу. Моменту  $t = t_{cc} = (z + x y_{cc})/v$ , где

$$y_{cc} = \frac{q^2 + 1}{\sqrt{q^2 - 1}}, \quad t_{cc} = \frac{z}{v} + \frac{x}{v} \frac{v^2 + c_1^2}{\sqrt{v^2 - c_1^2}} > t_0 > t^*, \quad (26)$$

отвечает достижение проекцией  $v_x^-$  величины  $-c_1$ . Наконец, из (25) следует, что при  $t \rightarrow +\infty$ , тогда и  $y \rightarrow +\infty$ , проекции  $v_x^\pm$  стремятся соответственно к  $\pm v$ .

6. *Примеры.* Для наглядности приведем конкретные примеры, иллюстрирующие описанную схему.

Пример 1.

Примем, что скорость света в веществе  $c_1 = 1$ , а скорость заряда  $v = \frac{5}{4} > c_1$ , так что  $v^2 - c_1^2 = \frac{9}{16}$ ,  $\sqrt{v^2 - c_1^2} = \frac{3}{4}$ . Пусть наблюдатель находится в точке с координатами  $\vec{r} = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{469}{40}\right)$  и наблюдает в момент  $t = 11$ , а заряд движется по оси аппликат так, что его радиус-вектор в зависимости от времени влияния  $\vec{r}_1 = \vec{v}t_1 = \frac{5}{4}(0, 1)t_1$ . Составим два вектора

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40}\right), \quad \vec{X}_1 = \vec{r} - \vec{v}t_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1) = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40}\right) + \frac{5}{4}(0, 1)(t - t_1). \quad (27)$$

Для определения моментов влияния надо решить уравнение

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = c_1(t - t_1) \quad \text{или} \quad |\vec{X}_1| = |\vec{X} + \vec{v}(t - t_1)| = c_1(t - t_1), \quad (28)$$

С принятыми нами значениями уравнение приобретает вид

$$\left| \left( \frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40} \right) + \frac{5}{4}(0,1)(t-t_1) \right| = t-t_1. \quad (29)$$

Возведя в квадрат, получим уравнение

$$\frac{9}{16}(t-t_1)^2 - \frac{81}{16}(t-t_1) + 14\frac{9}{25} + \frac{6561}{1600} = 0 \text{ или } (t-t_1)^2 - 9(t-t_1) + \frac{65}{4} = 0, \quad (30)$$

решения которого

$$t-t_1 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{65}{4}} = \frac{9}{2} \pm 2, \quad (31)$$

то есть  $t-t_1^+ = \frac{13}{2}$  и  $t-t_1^- = \frac{5}{2}$ , а  $t_1^+ = \frac{9}{2}$  и  $t_1^- = \frac{17}{2}$ . Соответствующие векторы

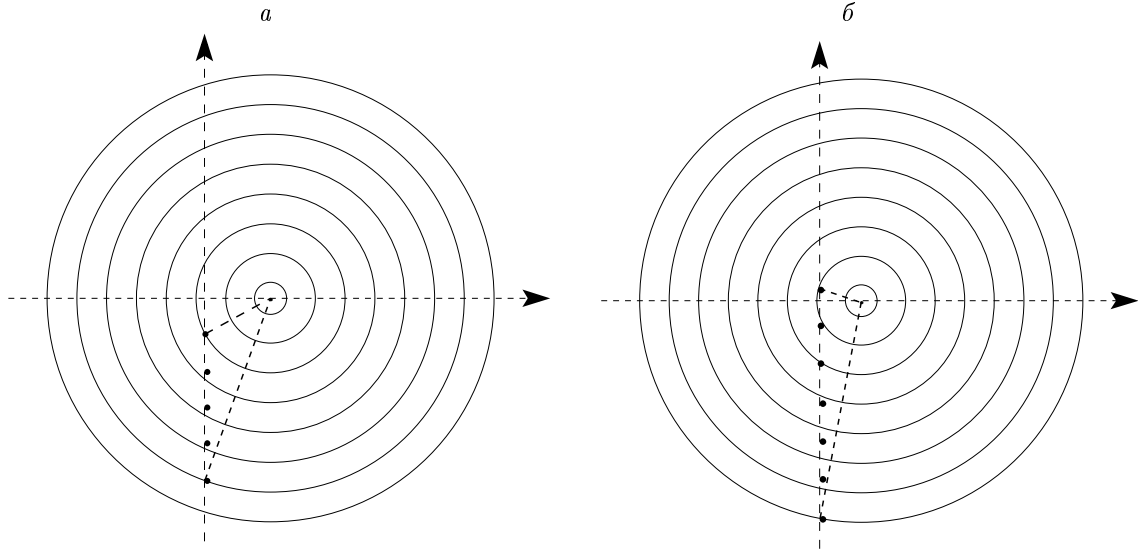
$$\vec{X}_1^+ = \left( \frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40} + \frac{5}{4} \frac{13}{2} \right) = \left( \frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{61}{10} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^+}{|\vec{X}_1^+|} = \frac{\vec{X}_1^+}{c_1(t-t_1^+)} = \left( \frac{6}{65}\sqrt{14}, \frac{61}{65} \right), \quad (32)$$

$$\vec{X}_1^- = \left( \frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40} + \frac{5}{4} \frac{5}{2} \right) = \left( \frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{11}{25} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^-}{|\vec{X}_1^-|} = \frac{\vec{X}_1^-}{c_1(t-t_1^-)} = \left( \frac{6}{25}\sqrt{14}, \frac{11}{25} \right). \quad (33)$$

Проекции скорости заряда на эти векторы

$$\vec{v}_x^+ = \frac{61}{65} \frac{5}{4} = \frac{65}{52} = 1.173 > c_1 = 1, \quad \vec{v}_x^- = \frac{11}{25} \frac{5}{4} = \frac{11}{20} = 0.55 < c_1 = 1. \quad (34)$$

Таким образом, в первый момент влияния заряд догоняет сферу влияния, затем он остается внутри сжимающейся сферы, пока сфера не догонит заряд, так как ее скорость по направлению к наблюдателю становится больше.



**Рис. 1.** Пересечение зарядом сфер влияния.

Эта ситуация изображена на рис. 1, *a*, где путь заряда по оси ашпликат представлен пунктирной линией, концентрические сферы вокруг положения наблюдателя — это сферы влияния. Последовательные положения заряда (точки) и сфер разделяются равными промежутками времени. Показаны два момента влияния с векторами  $\vec{X}_1^\pm$ , нарисованными жирным пунктиром. При втором пересечении зарядом сферы влияния он выходит из нее, так как проекция его скорости на радиальное направление меньше скорости света.

Пример 2.

Поместим наблюдателя в точку с измененным значением абсциссы:  $\vec{r} = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{469}{40} \right)$ . Остальные параметры оставим неизменными. Повторим все проделанные выше вычисления.

Векторы (27) отличаются только значениями абсциссы:

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{81}{40} \right), \vec{X}_1 = \vec{r} - \vec{v}t_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1) = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{81}{40} \right) + \frac{5}{4}(0, 1)(t - t_1). \quad (35)$$

Соответственно и уравнение для определения моментов влияния отличается от (29) лишь одним слагаемым:

$$\frac{9}{16}(t - t_1)^2 - \frac{81}{16}(t - t_1) + 11\frac{81}{400} + \frac{6561}{1600} = 0 \text{ или } (t - t_1)^2 - 9(t - t_1) + \frac{45}{4} = 0. \quad (36)$$

Решения получаются следующие:

$$t - t_1 = \frac{9}{2} \pm 3, \quad t - t_1^+ = \frac{15}{2}, \quad t - t_1^- = \frac{3}{2}, \quad (37)$$

а сами моменты  $t_1^+ = \frac{7}{2}$  и  $t_1^- = \frac{19}{2}$ .

Векторы направления на наблюдателя в момент влияния

$$\vec{X}_1^+ = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{81}{40} + \frac{5}{4} \frac{15}{2} \right) = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, \frac{147}{20} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^+}{|\vec{X}_1^+|} = \frac{\vec{X}_1^+}{c_1(t - t_1^+)} = \left( \frac{9}{150}\sqrt{11}, \frac{147}{150} \right), \quad (38)$$

$$\vec{X}_1^- = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{81}{40} + \frac{5}{4} \frac{3}{2} \right) = \left( \frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{3}{20} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^-}{|\vec{X}_1^-|} = \frac{\vec{X}_1^-}{c_1(t - t_1^-)} = \left( \frac{3}{10}\sqrt{11}, -\frac{1}{10} \right). \quad (39)$$

Проекция скорости заряда на эти векторы

$$\vec{v}_x^+ = \frac{147}{20} \frac{5}{4} = \frac{147}{120} = 1.225 > c_1 = 1, \quad \vec{v}_x^- = -\frac{1}{10} \frac{5}{4} = -\frac{1}{8} = -0.125. \quad (40)$$

В этом случае после первого пересечения зарядом сферы он находился внутри нее, но при второй встрече заряд и сфера движутся навстречу друг другу. И это положение отражено на рисунке 1,б.

## § 2. Потенциалы заряда в диэлектрике

1. *Нахождение потенциалов.* Поскольку скорость заряда больше скорости уменьшения радиуса сферы влияния, заряд нагоняет ее. Сначала он пересекает сферу извне, а затем изнутри. Пересечение изнутри может происходить, как мы видели двумя способами.

Можно считать, что вначале заряд движется прямо на наблюдателя со скоростью  $v_0 = v_x > 0$ . Вследствие движения заряда сфера влияния будет чувствовать его на протяжении расстояния, не равного  $a$ . Обозначим это расстояние  $b$ . За одно и то же время сфера пройдет расстояние  $b$ , а догоняющий ее заряд — расстояние  $a + b$ , так что

$$\frac{a + b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 - 1}. \quad (41)$$

Когда заряд и сфера влияния движутся навстречу друг другу, скорость заряда  $v_0 = -v_x^+ > 0$  — это проекция вектора его скорости на направление не на, а от наблюдателя. В этом случае

$$\frac{a - b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 + 1}. \quad (42)$$

Такое же соотношение получается и в том случае, если сфера догоняет заряд, так что варианты прохождения заряда через сферу при втором пересечении не влияют на окончательный результат.

Замечая, что полученные отношения не зависят от размера заряда, то есть справедливы и для точечного заряда, мы можем вычислить интеграл, входящий в (6), вынеся за знак интеграла множители при  $\delta$ -функциях и воспользовавшись (41) и (42):

$$\varphi = \frac{e}{n^2} \left[ \frac{1}{X_1^+} \frac{1}{v_x^+/c_1 - 1} + \frac{1}{X_1^-} \frac{1}{-v_x^-/c_1 + 1} \right]. \quad (43)$$

Подставив сюда выражения для  $X_1^\pm$  и  $v_x^\pm$  из (24) и (25), а также приняв во внимание определения (21), получим окончательно

$$\varphi = \frac{2e c_1}{n^2} \frac{1}{Y}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c} n^2 \varphi. \quad (44)$$

2. *Производные от потенциалов.* Поскольку в выражения для напряженностей входят производные от потенциалов, найдем сначала эти производные.

Согласно (44) потенциалы зависят от времени и координат только через величину  $Y$ , которая определяется формулами (11) и (8). Поэтому найдем производные от этой величины. Проще начать с ее квадрата, который можно записать в виде

$$Y^2 = c_1^2(z - vt)^2 - (v^2 - c_1^2)x^2. \quad (45)$$

Тогда

$$\vec{\nabla}Y^2 = 2(\vec{X}\vec{v})\vec{v} - 2(v^2 - c_1^2)\vec{X} = 2\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{X}) + 2c_1^2\vec{X} = 2(-(v^2 - c_1^2)x, 0, c_1^2(z - vt)), \quad (46)$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = -2(\vec{X}\vec{v})v^2 + 2(v^2 - c_1^2)\vec{X}\vec{v} = -2c_1^2\vec{X}\vec{v} = -\vec{v}(\vec{\nabla}Y^2) = -2c_1^2(z - vt)v. \quad (47)$$

Следовательно,

$$\vec{\nabla}\varphi = -\varphi \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{X}) + c_1^2\vec{X}}{Y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\vec{v}\vec{\nabla}\varphi. \quad (48)$$

Из связи векторного и скалярного потенциалов (3) получается

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2(\vec{v}\vec{\nabla}\varphi), \quad \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2\vec{\nabla}\varphi, \quad (49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2 \times \vec{\nabla}\varphi = \frac{n^2}{c} \frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{v} \times \vec{X}. \quad (50)$$

Легко проверить, что условие Лоренца соблюдается

$$\frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (51)$$

Теперь у нас есть все для нахождения характеристик создаваемого зарядом поля.

### § 3. Излучение Черенкова и его спектр

1. *Поле и излучение.* По производным от потенциалов просто найти выражения для напряженностей поля. Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\varphi}{Y^2}[\vec{v}(\vec{X}\vec{v}) - (v^2 - c_1^2)\vec{X} - \frac{n^2}{c^2}\vec{v}(c_1^2\vec{X}\vec{v})] = -\frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{X}. \quad (52)$$

Магнитная напряженность

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{n^2}{c}\vec{E} \times \vec{v} \quad (53)$$

перпендикулярна электрической и обе они ортогональны вектору распространения излучения, то есть вектору Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H} = S\vec{l}. \quad (54)$$

Те же напряженности в координатах

$$\vec{E} = \frac{2ec_1}{n^2} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^3}(x, 0, z - vt), \quad \vec{H} = \frac{2ev}{n} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^3}(0, x, 0), \quad (55)$$

а вектор потока излучения

$$\vec{S} = \frac{e^2c^2v}{4\pi n^4} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^6}x(z - vt, 0, -x). \quad (56)$$

Очевидно, что векторы

$$\vec{l} = \frac{(z - vt, 0, -x)}{X}, \quad -\frac{\vec{X}}{X}, \quad (0, 1, 0) \quad (57)$$

образуют правую тройку ортов.

Как уже отмечалось, до момента  $t = t^*$  излучения заряда нет. В момент  $t = t^*$  величина  $Y$  и, значит, знаменатели у потенциалов и напряженностей обращаются в нули, так что сами эти величины бесконечны. После этого момента напряженности непрерывны и при больших  $t$  убывают, как  $1/t^2$ , а вектор Пойнтинга, как  $1/t^4$ . Обращение поля в бесконечность является следствием того, что при выводе формул не учитывалась дисперсия, то есть показатель преломления считался постоянным.

2. *Спектр черенковского излучения.* Для нахождения характеристик спектра необходимо найти преобразования Фурье от напряженностей. Начнем с потенциалов. Преобразование Фурье от величины, обратной  $Y$ , легко выражается через функцию Макдональда

$$\int_{t^*}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dt}{Y} = \frac{1}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{x}{vc_1}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{vc_1} e^{i\omega z/v} K_0\left(-i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{x}{vc_1}\right). \quad (58)$$

Таким образом, интеграл выражается через функции Бесселя. Однако, лучше не использовать это явное выражение, а оставить его в виде интеграла, что позволяет учесть дисперсию. Скалярный и векторный потенциалы представляются интегралом

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2ec_1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{xu}{vc_1}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad \vec{A} = \frac{n^2}{c} \vec{v}\varphi. \quad (59)$$

Соответственно для напряженностей получаются такие же интегралы. Для электрической

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2ec_1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{xu}{vc_1}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \vec{E}(\omega, u) \quad (60)$$

и аналогичный для магнитной напряженности с весовой функцией  $\vec{H}(\omega, u)$ . Для этих весовых функций находим при помощи выражений напряженностей через потенциалы

$$\begin{aligned} \vec{E}(\omega, u) &= \frac{1}{2\pi} \frac{2e}{n^2 v} \left[ -\left( i\frac{\omega}{v} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} u, 0, i\frac{\omega}{v} \right) + \frac{n^2}{c^2} (0, 0, v) i\omega \right] = \\ &= -i \frac{e\omega}{\pi n^2 v^2} \left( \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} u, 0, -\frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} \right) = -i \frac{e\omega}{\pi n^2 v^2} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} \left( u, 0, \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Для магнитной напряженности

$$\vec{H}(\omega, u) = \frac{e}{\pi n^2 v} \frac{n^2}{c} \vec{v} \times \left( i\frac{\omega}{v} \sqrt{v^2 - c_1^2} c_1 u, 0, i\frac{\omega}{v} \right) = i \frac{e\omega}{\pi v c} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} (0, 1, 0). \quad (62)$$

Наконец, для вектора Пойнтинга находим

$$\vec{S}(\omega, u) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^2 \omega^2}{\pi^2 n^2 v^3 c} \frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{1}{u^2 - 1} \left( \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1^2}, 0, u \right). \quad (63)$$

3. *Излучаемая мощность.* Величина излучаемой мощности равна потерям энергии внешних сил на то, чтобы “тянуть заряд за веревочку”, и может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} W &= - \int \vec{j} \vec{E} d^3 r = -e \int v E_z d^3 r \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) = \\ &= -ev \int \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) d^3 r \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(z/v-t)} d\omega \int_x^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \exp\left(i\frac{\omega}{c_1} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{v^2}} u\right) \times \\ &\times i \frac{e\omega}{\pi n^2 v^2} \frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} = \frac{e^2 v}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \left(1 - \frac{c_1^2}{v^2}\right) \text{sgn}(\omega) \frac{\pi}{2} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\infty} \omega \left(1 - \frac{c_1^2}{v^2}\right) d\omega. \end{aligned}$$

При подстановке выражения (60) переменная  $u$  была заменена на  $u/x$ . В интеграле по частоте оставлен был только синус по соображениям четности.

Совершенно очевидно, что последний интеграл при постоянных  $v$  и  $c_1$  равен бесконечности, что не имеет физического смысла и отражает неадекватность наших предположений. На самом деле  $\varepsilon$  и следовательно показатель преломления  $n$  зависят от частоты. При больших частотах  $\omega$  скорость света в веществе  $c_1 \sim c$ , а в рентгене может быть даже  $c_1 > c$  (преобразование Фурье от передаточной функции  $\varepsilon(\omega)$  и играющая роль показателя преломления величина  $n(\omega)$  меньше единицы). Поэтому интеграл по частоте надо брать не до бесконечности, а до некоторого  $\omega_{\max}$ , которое определяется условием  $n(\omega_{\max}(v)) = c/v \approx 1$ . Тогда результат (64) переписется в виде

$$W = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_{\max}(v)} \omega \left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right) d\omega. \quad (64)$$

Формула (64) носит название формулы Тамма—Франка, которые ее получили.

## § 4. Переходное излучение

1. *Природа излучения.* Если заряд движется с постоянной скоростью, но не в вакууме, а в среде, он может излучать, даже когда его скорость меньше скорости света в этой среде. На такую возможность обратили внимание В. Л. Гинзбург и И. М. Франк в 1946 году [9]. Излучение возникает, если на пути заряда изменяются свойства среды. Первоначально рассматривалось излучение при переходе заряда из среды с одними оптическими свойствами в среду со свойствами, отличными от свойств первой. Затем было установлено, что причиной возникновения излучения может быть и плавное изменение свойств стационарной среды вдоль траектории заряда, и изменение этих свойств со временем. При немонотонном изменении оптических свойств, например периодическом, может происходить и рассеяние, то есть образование отраженных волн. Все эти механизмы по традиции называются переходными.

Здесь мы рассмотрим простейший случай перехода заряда из одной однородной полубесконечной среды в другую однородную же среду, при условии, что скорость заряда перпендикулярна границе раздела. Изложение ведется по книге [8].

Пусть заряд  $q$  движется вдоль оси аппликат со скоростью  $v > 0$ . Для него плотности заряда и тока

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{v}t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}\rho(\vec{r}, t) = qv(0, 0, 1)\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt). \quad (65)$$

Уравнение неразрывности, конечно, выполняется.

Плоскость  $xy$  разделяет два полупространства, заполненных диэлектриками с различными постоянными коэффициентами диэлектрической проницаемости:  $\varepsilon_-$  при  $z < 0$  и  $\varepsilon_+$  при  $z > 0$ . На границе эта величина терпит скачок.

2. *Основные уравнения.* Запишем уравнения Максвелла для такой ситуации. В каждом из полупространств эти уравнения имеют вид

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (66)$$

Стандартным приемом сводим уравнения к одному уравнению для напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \vec{\nabla} \rho - \Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (67)$$

Отсюда с учетом связи плотностей (65) получается уравнение

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = -4\pi \left( \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \rho + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (68)$$

3. *Преобразования Фурье.* Разложим плотность заряда и электрическую напряженность в интегралы Фурье по времени и по координатам  $x$  и  $y$ :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int \tilde{\rho}(\omega, z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} d\alpha_x d\alpha_y d\omega, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \int \tilde{\vec{E}}(\alpha_x, \alpha_y, \omega, z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} d\alpha_x d\alpha_y d\omega. \quad (69)$$

Преобразование плотности тока легко вычисляется:

$$\tilde{\rho}(\omega, z) = \frac{q}{(2\pi)^3} \int \delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) e^{-i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} dx dy dt = \frac{q}{(2\pi)^3 v} e^{i\omega z/v}. \quad (70)$$

Так как больше всего мы будем иметь дело с проекцией вектора  $\vec{E}$  на ось  $z$ , обозначим  $\vec{E}_z = E$ . Производную по  $z$  будем отмечать штрихом. Уравнение (68) для преобразования этой проекции тогда примет вид

$$-\frac{\varepsilon}{c^2} \omega^2 E + (\alpha_x^2 + \alpha_y^2) E - E'' = -4\pi \left( \frac{1}{\varepsilon} i \frac{\omega}{v} - \frac{v}{c^2} i \omega \right) \tilde{\rho}. \quad (71)$$

Уравнение (71) можно переписать так:

$$\varepsilon E'' + \varepsilon \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \alpha_{\perp}^2 \right) E = -\frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left( \varepsilon - \frac{c^2}{v^2} \right) e^{i\omega z/v}, \quad (72)$$

где  $\mathfrak{a}_\perp = |\vec{\mathfrak{a}}_\perp|$ ,  $\vec{\mathfrak{a}}_\perp = (\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, 0)$ . Зависимость преобразований от частоты  $\omega$  определяет временную, а от  $\vec{\mathfrak{a}}_\perp$  — пространственную дисперсию.

Найдя  $E = \vec{E}_z$ , можно определить и проекции вектора  $\vec{E}$  на плоскость. В частности, наиболее просто получить их комбинацию  $E_{\mathfrak{a}} = \vec{\mathfrak{a}}_\perp \vec{E}_\perp = \mathfrak{a}_x \vec{E}_x + \mathfrak{a}_y \vec{E}_y$ . Из второго уравнения в (66) следует, что

$$iE_{\mathfrak{a}} + E' = \frac{4\pi}{\varepsilon} \tilde{\rho}. \quad (73)$$

На границе сред должны быть непрерывны нормальные составляющие индукции и тангенциальные составляющие напряженности, запишем эти условия для преобразований:

$$\varepsilon_- E_-|_{z=0} = \varepsilon_+ E_+|_{z=0}, (E_{\mathfrak{a}})_-|_{z=0} = (E_{\mathfrak{a}})_+|_{z=0}. \quad (74)$$

4. *Решения уравнений.* Частное решение уравнения (72) описывает поле самого заряда:

$$E^q = -\frac{4\pi q(1 - c^2/v^2\varepsilon)}{\omega(2\pi)^3(\varepsilon - c^2/v^2 - \mathfrak{a}_\perp^2 c^2/\omega^2)} e^{i\omega z/v}. \quad (75)$$

Решения однородного уравнения представляют свободные волны, то есть излучение:

$$E_\pm = \frac{4\pi q}{\omega(2\pi)^3} C_\pm e^{\pm i(\omega z/c)\sqrt{\varepsilon - \mathfrak{a}_\perp^2 c^2/\omega^2}}. \quad (76)$$

Здесь амплитуды  $C_\pm$  безразмерны.

Комбинация тангенциальных компонент находится из соотношения (73):

$$E_{\mathfrak{a}}^q = -\frac{\mathfrak{a}_\perp^2 c^2}{v\omega} \frac{E^q}{\varepsilon - c^2/v^2}, (E_{\mathfrak{a}})_\pm = \mp \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \frac{\mathfrak{a}_\perp^2 c^2}{\omega^2}} E_\pm. \quad (77)$$

Характер написанных решений зависит от соотношения между коэффициентом диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ , параметром  $\mathfrak{a}_\perp$  и частотой  $\omega$ . Если  $\varepsilon < \mathfrak{a}_\perp^2 c^2/\omega^2$ , то показатели в экспонентах в (76) вещественны, при  $z > 0$  необходимо взять отрицательный, а при  $z < 0$  — положительный показатели, так что решения описывают затухающие от границы волны. Такие волны всегда возможны при определенных значениях  $\omega$  и  $\mathfrak{a}_\perp$ , но они нас не интересуют. Отвлечемся мы и от возможных решений, описывающих волны вдоль плоскости раздела сред. Наконец, если на границе нет разрыва и выполняется соотношение  $\varepsilon = n^2 > c^2/v^2$ , где  $n$  — показатель преломления, то это означает, что справедливо условие существования излучения Черенкова  $v > c/n$ . В частности, из (75) сравнительно легко можно получить формулу Тамма—Франка (64).

5. *Амплитуды волн.* Теперь примем условия  $\frac{\mathfrak{a}_\perp^2 c^2}{\omega^2} < \varepsilon_\pm < \frac{c^2}{v^2}$ , для выполнения которых необходимо, чтобы было  $\frac{\omega}{\mathfrak{a}_\perp} > v$ . Переходное излучение распространяется от границы раздела сред, то есть при положительных аппликатах в формулах (76) надо брать плюс, а при отрицательных — минус.

Для сокращения формул введем обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{a}_\perp c}{\omega}, \quad r_\pm = \sqrt{\varepsilon_\pm - \zeta^2}, \quad s_\pm = \varepsilon_\pm - \frac{1}{\beta^2} - \zeta^2 = -\frac{1}{\beta^2}(1 - \beta r_\pm)(1 + \beta r_\pm). \quad (78)$$

Запишем граничные условия (74), заранее сократив на общий множитель  $\frac{4\pi i q}{\omega(2\pi)^3}$ , выделив целую часть у возникающих дробей со знаменателями  $s_\pm$  в первом равенстве и сократив на общий множитель дробей во втором:

$$\frac{\zeta^2}{s_-} - \varepsilon_- C_- = \frac{\zeta^2}{s_+} - \varepsilon_+ C_+, \quad \frac{\zeta^2}{\beta\varepsilon_- s_-} + r_- C_- = \frac{\zeta^2}{\beta\varepsilon_+ s_+} - r_+ C_+. \quad (79)$$

Исключая по очереди два искомого коэффициента, найдем

$$C_+ = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_+} \frac{\beta\zeta^2}{1 - \beta r_-} \frac{1 - \beta^2\varepsilon_+ - \beta r_-}{1 - \beta^2 r_+^2}, \quad C_- = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_-} \frac{\beta\zeta^2}{1 + \beta r_+} \frac{1 - \beta^2\varepsilon_- + \beta r_+}{1 - \beta^2 r_-^2}, \quad (80)$$

где  $D = \varepsilon_+ r_- + \varepsilon_- r_+$ .

6. *Предельные случаи.* Если заряд нерелятивистский, то есть  $\beta \ll 1$ , то оба коэффициента малы и при условии, что диэлектрические проницаемости  $\varepsilon$  не очень различаются, одного порядка:

$$C_\pm = \beta\zeta^2 \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D\varepsilon_\pm}. \quad (81)$$



Сильное излучение возникает на высоких частотах, если заряд ультрарелятивистский, причем, как обычно для таких случаев, излучение идет узкими пучками в определенных направлениях. Действительно, пусть  $\beta \sim 1, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1$ . На высоких частотах почти всегда оправдано использование формулы для диэлектрической проницаемости, которая характерна для дисперсии в плазме. Мы примем эту формулу, причем используем обозначение плазменной частоты:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}. \quad (82)$$

Введем безразмерные величины, имеющие порядок 1, выделив множитель  $\gamma$ :

$$\zeta = \frac{\mathfrak{x}_\perp c}{\omega} = \frac{\mathfrak{x} c}{\omega} \sin \theta = \frac{\theta_0}{\gamma}, \quad \omega = \frac{\omega_{p\pm}}{\Omega_\pm} \gamma, \quad \varepsilon_\pm \sim 1 - \frac{\Omega_\pm^2}{\gamma^2}. \quad (83)$$

Тогда  $D \sim 2, 1 + \beta r_\pm \sim 2, \varepsilon_+ - \varepsilon_- \sim \frac{\omega_{p-}^2 - \omega_{p+}^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{\gamma^2}$ ,

$$1 - \beta r_\pm \sim 1 - \beta \sqrt{1 - \frac{\Omega_{p\pm}^2}{\gamma^2} - \frac{\theta_0^2}{\gamma^2}} \sim 1 - \beta + \frac{\beta}{2\gamma^2} (\Omega_{p\pm}^2 + \theta_0^2) \sim \frac{1 + \theta_0^2 + \Omega_\pm^2}{2\gamma^2}. \quad (84)$$

Числители последних дробей в формулах (80) при принятых предположениях можно заменить на  $-1$  у  $C_+$  и на  $1$  у  $C_-$ . Подставляя все это в указанные формулы, получим

$$C_+ \sim \frac{\Omega_+^2 - \Omega_-^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_+} \frac{\theta_0^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_-}, \quad C_- \sim \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{4\gamma^2} \frac{\theta_0^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_-} = -\frac{C_+}{4\gamma^2(1 + \theta_0^2 + \Omega_+^2)}. \quad (85)$$

Амплитуда волны, направленной в сторону движения заряда конечна, а в противоположную сторону — мала.

# Глава VI. Комптоновское рассеяние

## § 1. Описание комптоновского рассеяния

1. *Комптоновское рассеяние и изменение энергии фотона.* Рассеяние излучения электронами, называемое комптоновским, играет важную роль в формировании спектров ряда объектов в Метагалактике, изучаемых астрофизиками. Здесь дается понятие об этом виде рассеяния.

В 1923 году А. Комптон опубликовал статью об открытии эффекта, впоследствии получившего его имя. За свое открытие и его объяснение Комптон получил Нобелевскую премию по физике 1927 года.

Комптоновское рассеяние — это акт взаимодействия электрона и фотона, в результате которого эти частицы изменяют свои импульсы, энергии и состояния поляризации. Поэтому часто говорят, что частицы после рассеяния — не те, что были перед рассеянием. Подробное описание физики этого процесса и его использования при интерпретации наблюдений астрофизических объектов содержится в обзорах [14], [44],[45].

Пусть взаимодействуют фотон с импульсом  $\vec{k}$  и электрон с импульсом  $\vec{p}$ . После рассеяния их импульсы изменяются и становятся равными соответственно  $\vec{k}_1$  и  $\vec{p}_1$ . Энергии этих частиц  $ck$ ,  $cp_0$ ,  $ck_1$ ,  $cp_{01}$ . Для импульсов электрона справедливы обычные релятивистские соотношения [29]

$$p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p^2}, \quad p_{01} = \sqrt{m^2c^2 + p_1^2}. \quad (1)$$

Комптоновскому рассеянию отвечают две диаграммы Фейнмана [6], представленные на рис. 1. Электрон изображается сплошной линией, а фотон волнистой. Время течет снизу вверх. Взаимодействие происходит в точках, где встречаются электронные и фотонные линии.

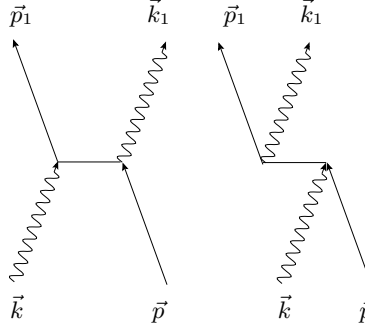


Рис. 1. Диаграммы комптоновского рассеяния.

Отметим, что свободный электрон не может поглотить или излучить фотон, так как при таких процессах невозможно сохранение импульса и энергии.

Независимо от вида диаграммы при рассеянии выполняются четыре закона сохранения

$$p_0 + k = p_{01} + k_1, \quad \vec{p} + \vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{k}_1. \quad (2)$$

Выразим вектор импульса электрона после рассеяния через остальные и подставим в равенство, выражающее закон сохранения энергии:

$$p_0 + k - k_1 = \sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}_1)^2}. \quad (3)$$

Возводя в квадрат и сокращая, получаем

$$kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k_1p_0 - \vec{k}_1\vec{p} + kk_1 - \vec{k}\vec{k}_1. \quad (4)$$

Обозначим косинусы углов между парами векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}$  и  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}_1$  и  $\vec{p}$  соответственно через  $\mu$ ,  $\zeta$  и  $\zeta_1$ . Тогда соотношение (4) переписывается в виде

$$k(p_0 - p\zeta) = k_1[p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)]. \quad (5)$$

Из него находится величина импульса фотона после рассеяния

$$k_1 = k \frac{p_0 - p\zeta}{p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)}. \quad (6)$$

Рассмотрим частный случай, когда до рассеяния электрон покоится, т. е.  $p = 0$ . Тогда  $p_0 = mc$  и

$$k_1^0 = k^0 \frac{mc}{mc + k^0(1 - \mu_0)}. \quad (7)$$

Вспомнив, что импульс фотона  $k = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ , перепишем формулу (7) через длины волн

$$\lambda_1^0 = \lambda^0 + \lambda_C(1 - \mu_0). \quad (8)$$

При рассеянии фотона на покоящемся электроне частота фотона всегда уменьшается, и в этом заключается эффект Комптона. При  $\mu_0 = 1$ , т. е. при рассеянии вперед, рассеянный фотон пролетает, как будто не испытал взаимодействия, а электрон остается неподвижным. Рассеяние под прямым углом ( $\mu_0 = 0$ ) дает увеличение длины волны ровно на  $\lambda_C$ . Максимальное увеличение  $\lambda$  на две комптоновские длины волны достигается, когда фотон изменяет свое направление на противоположное. Потеря энергии фотоном, называемая эффектом отдачи, происходит вследствие передачи им части своего импульса, а значит и энергии, первоначально покоящемуся электрону, который приходит в движение.

Если электрон не стоял на месте, то при различном соотношении направлений и величин импульсов реагирующих частиц фотон может как увеличивать, так и уменьшать свою энергию, но это уже не эффект Комптона в чистом виде, а скорее следствие эффекта Доплера. Действительно, мы должны перейти в систему отсчета, связанную с электроном до рассеяния, которую мы будем называть лабораторной. Там фотон уменьшит свою энергию, а затем нам надо вернуться в исходную систему отсчета. В результате таких переходов фотон меняет свою энергию вследствие эффекта Доплера. Однако в астрофизической литературе увеличение энергии фотонов при комптоновском рассеянии их энергичными электронами принято называть обратным эффектом Комптона.

Комптоновская длина волны очень мала — ей соответствует энергия, равная энергии покоя электрона 511 кэВ. Поэтому увеличение длины волны фотона при рассеянии на нерелятивистском электроне заметно, только если длина волны рассеиваемого фотона не очень существенно отличается от комптоновской. Горячие электроны могут передать значительную долю своей энергии фотону и вызывать гораздо большие смещения длины волны, которые доступны измерениям даже в радиодиапазоне. Релятивистские же электроны сразу переводят излучение из радио в оптический диапазон, из оптического — в рентгеновский, из ультрафиолетового — в область гамма-излучения.

2. *Эффективность комптоновского рассеяния.* Сравним комптоновское рассеяние с тормозным поглощением.

Коэффициент тормозного излучения, или, иначе, излучательная способность вещества, — количество энергии, излучаемой единицей объема за единицу времени в единичном телесном угле при взаимодействии электронов, импульсы которых распределены согласно формуле Максвелла с температурой  $T$ , с водородоподобными ионами с зарядом ядра  $Z$ , с точностью до множителя порядка 1 дается формулой Крамерса (см., Главу 1)

$$\varepsilon_{cc}(\nu) = n_e n^+ \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}} \frac{k_B T}{c^3} \frac{k_B T}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} e^{-h\nu/k_B T}. \quad (9)$$

Здесь  $n_e$  и  $n^+$  — концентрации электронов и ионов,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $\nu$  — частота излучения.

Напишем уравнение переноса излучения с учетом тормозных процессов и комптоновского рассеяния:

$$\frac{\partial I}{\partial l} = -(\alpha_{cc} + \alpha_C)I + \varepsilon_{cc}(1 + n) + \varepsilon_C. \quad (10)$$

Здесь  $\alpha_{cc}$  и  $\alpha_C$  — коэффициенты ослабления при тормозном поглощении и комптоновском рассеянии соответственно,  $\varepsilon_C$  — коэффициент излучения за счет комптоновского рассеяния,  $I$  и  $n$  — интенсивность и средние числа заполнения фотонных состояний,  $I = (2h\nu^3/c^2)n$ ,  $l$  — геометрическое расстояние вдоль луча. Уравнение переноса можно записать и для средних чисел заполнения:

$$\frac{\partial n}{\partial l} = -(\alpha_{cc} + \alpha_C)n + n_{cc}(1 + n) + n_C, \quad (11)$$

где

$$n_{cc} = \frac{c^2}{2h\nu^3} \varepsilon_{cc}, \quad n_C = \frac{c^2}{2h\nu^3} \varepsilon_C. \quad (12)$$

Предположим, что вещество и излучение находятся в состоянии термодинамического равновесия (ТДР). Тогда интенсивность излучения не зависит от направления и дается формулой Планка

$$I_0 = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_0, \quad n_0 = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (13)$$

Следствием ТДР является условие детального баланса, которое выполняется отдельно для тормозного и комптоновского процессов:

$$\alpha_{cc}n_0 = n_{cc}(1 + n_0), \quad \alpha_C n_0 = n_C. \quad (14)$$

Из первого соотношения вытекает закон Кирхгофа—Планка

$$\alpha_{cc} = n_{cc}e^{h\nu/k_B T}. \quad (15)$$

Не уточняя здесь слагаемого, описывающего излучение за счет комптоновского рассеяния, составим отношение коэффициентов ослабления. В качестве сечения рассеяния возьмем томсоновское  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_e^2$ ,  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ . Тогда безразмерное отношение

$$\frac{\alpha_C}{\alpha_{cc}} = \frac{n_e \sigma_T}{n_{cc} e^{h\nu/k_B T}} = \frac{n_e \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2}{\frac{c^2}{2h\nu^3} n_e n^+ + \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{c^3} \frac{k_B T}{(2\pi m k_B T)^{3/2}}} = \frac{\bar{v} \sqrt{3} \pi^2}{c} \frac{\hbar c}{n^+ \lambda^3 Z^2 e^2} = 2.342 \cdot 10^3 \frac{\bar{v}}{c} \frac{1}{Z^2 (n^+ \lambda^3)}, \quad (16)$$

где  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$  — средняя скорость электронов. Для водородного газа надо положить  $Z = 1$  и  $n^+ = n_e$ . Отношение (16) представлено в виде произведения безразмерных множителей, в частности, произведение  $n^+ \lambda^3$  есть число ионов в кубике с длиной ребра, равной длине волны рассеиваемого излучения.

Из полученной формулы видно, что рассеяние электронами играет более существенную роль по сравнению с тормозными процессами при низких концентрациях ионов и высоких температурах газа. Как мы видели, изменение энергии фотонов заметно при малых длинах волн излучения. Заряд иона не должен быть слишком велик. Короче говоря, томсоновское и комптоновское рассеяние необходимо принимать во внимание в горячих разреженных средах, причем комптоновское рассеяние, т. е. рассеяние с изменением частоты излучения, существенно тогда, когда средние энергии электронов и/или фотонов велики настолько, что сравнимы с энергией покоя электрона. В таких средах это основной механизм обмена энергией между веществом и излучением.

Сечение комптоновского рассеяния в отличие от томсоновского зависит от частоты рассеиваемого фотона, о чем говорится в следующем пункте.

3. *Сечение комптоновского рассеяния.* Это сечение рассчитывается, как уже говорилось, методами квантовой электродинамики [6], которая является релятивистской теорией. Поэтому для записи релятивистского сечения комптоновского рассеяния введем релятивистские обозначения для некоторых величин.

Импульс электрона зададим четырехмерным вектором  $\underline{p} = \{p_0, \vec{p}\}$ , где использованы уже применявшиеся обозначения. Аналогично импульс фотона  $\underline{k} = \{k, \vec{k}\}$ . Четырехмерное скалярное произведение  $\underline{p}\underline{k} = p_0 k - \vec{p}\vec{k}$ . Для других векторов оно определяется точно так же, со знаком минус перед трехмерным скалярным произведением. В частности,  $\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$ ,  $\underline{k}^2 = k^2 - \vec{k}^2 = 0$ : импульс электрона — времениподобный вектор, а импульс фотона — нулевой.

Существенной частью сечения Клейна—Нишины—Тамма является безразмерный лоренцевский инвариант

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 - 1 + B, \quad B = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \quad (17)$$

Здесь

$$\xi = \underline{p}\underline{k}/m^2 c^2 = k^0/mc, \quad \xi_1 = \underline{p}\underline{k}_1/m^2 c^2 = k_1^0/mc \quad (18)$$

— безразмерные скалярные произведения импульсов электрона и фотона, равные соответственно безразмерному же импульсу фотона до и после рассеяния в лабораторной системе (где  $p = 0$ ). Величина  $\mu_0$  — это уже использованный косинус угла рассеяния в той же лабораторной системе отсчета, которая является собственной для электрона до рассеяния. Согласно (7) его можно записать в виде

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}. \quad (19)$$

Написав сечение в виде

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 + 1 + B - 2, \quad (20)$$

убеждаемся, что оно в лабораторной системе представляет собой сумму рэлеевской индикатрисы (слагаемое  $\mu_0^2 + 1$ ) с небольшой добавкой. Эта добавка зависит от частот фотона до и после рассеяния, но не зависит от их направлений. Таким образом, комптоновское рассеяние в лабораторной системе — это комбинация рэлеевского и изотропного рассеяния.

Развернутое выражение для  $F$  имеет вид

$$F(\xi, \xi_1) = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}\right) + \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \quad (21)$$

Полное сечение рассеяния представляется интегралом, который вычисляется:

$$\sigma_T = \frac{r_e^2}{2\xi^2} \int F x_1^2 d^2\omega_1 = \frac{r_e^2}{2\xi^2} \int_{-1}^1 F \xi_1^2 d\mu_0 \int_0^{2\pi} d\phi_0 = \frac{r_e^2}{2\xi^2} 2\pi \int_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F d\xi_1 = \sigma_T s_0(\xi), \quad (22)$$

где  $\phi_0$  — азимут рассеянного фотона в лабораторной системе, а  $s_0(\xi)$  — профиль полного сечения:

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[ 4 + \left( \xi - 2 - \frac{2}{\xi} \right) \ln(1 + 2\xi) + 2\xi^2 \frac{1 + \xi}{(1 + 2\xi)^2} \right], \quad (23)$$

нормированный условием  $s_0(0) = 1$ .

Мы говорили об однократном взаимодействии электрона и фотона. Многократное рассеяние, т. е. взаимодействие электронного и фотонного газов посредством комптоновского рассеяния описывается кинетическим уравнением, которое мы сформулируем ниже.

## § 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи

1. *Релятивистские обозначения.* Упомянутое уравнение является релятивистским обобщением уравнения Больцмана. Для его написания подберем релятивистские аналоги величин, входящих в уравнение Больцмана.

Уже отмечалась инвариантность отношений  $d^3p/p_0$  и  $\frac{d^3k}{k}$ . При этом инвариантны и два множителя этого отношения, а именно  $\frac{dk}{k}$  и  $k^2 d^2\omega$ , где  $\vec{\omega}$  — единичный вектор направления импульса фотона:  $\vec{k} = k\vec{\omega}$ , а  $d^2\omega$  — элемент телесного угла, т. е. площади поверхности на единичной сфере. Для частиц с не равной нулю массой покоя это свойство не выполняется. Указанным свойством элемента объема импульса фотона объясняется форма интеграла в полном сечении (22), так как  $x_1^2 d^2\omega_1 = \xi_1^2 d\mu_0 d\phi_0 = d\xi_1 d\phi_0$ .

Еще одну инвариантную комбинацию надо найти для левой части кинетического уравнения. В уравнении Больцмана там стоит  $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{F} \vec{\nabla}_{\vec{p}} f$ . На фотоны никакие силы не действуют, так что последнее слагаемое не нужно. Для дифференцирования необходим четырехмерный вектор-градиент. Он должен быть взят в виде  $\nabla = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\}$ , так как скалярное произведение его с вектором  $d\mathbf{r} = \{cdt, d\vec{r}\}$ , т. е.  $d\mathbf{r} \nabla = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\vec{r} \vec{\nabla}$  есть полный дифференциал, инвариантный относительно любого преобразования переменных, в том числе и лоренцевского. Инвариантом, следовательно, будет произведение  $\underline{k} \nabla = \frac{k}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{k} \vec{\nabla} = \frac{k}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c\vec{\omega} \vec{\nabla} \right)$ , которое и является релятивистским обобщением левой части уравнения Больцмана с учетом того, что скорость света постоянна. Именно такая комбинация производных, как в круглых скобках, стоит в левой части уравнения переноса излучения.

Релятивистскими инвариантами являются безразмерные средние числа заполнения фотонных состояний. Например, в случае выполнения ТДР это среднее число дается формулой Планка (13), которая написана в системе отсчета, связанной с фотонным газом и называемой сопутствующей, т. е. в такой, в которой средний импульс фотонов равен нулю.

Функцию распределения электронов  $f_e(\vec{p})$  также будем считать скаляром. Мы примем, что электроны имеют релятивистское распределение Максвелла, которое в сопутствующей системе отсчета задается формулами

$$f_e(\vec{p}) = n_e f_e(p_0/mc), \quad f_e(p_0/mc) = f_M(p_0/mc), \quad f_M(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-y\gamma}, \quad (24)$$

где  $y = \frac{mc^2}{k_B T_e}$ , а  $K_\nu(y)$  — функция Макдональда. Появление этой функции есть следствие условия нормировки

$$\frac{4\pi}{m^3 c^3} \int_0^\infty p^2 f_e(p_0/mc) dp = 1. \quad (25)$$

Теперь мы имеем все, чтобы написать кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния.

2. *Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния.* При написании этого уравнения принимается, что электронный газ релятивистский, но не вырожденный, так что запрет Паули не учитывается. Фотонный же газ может быть частично вырожден, и поэтому необходимо учитывать вынужденные переходы.

Для средних чисел заполнения состояний фотонов  $n = n(\vec{r}, t, \vec{k})$  в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  с импульсами около  $\vec{k}$  уравнение имеет вид

$$\underline{k} \nabla n = -\frac{r_e^2}{2} m^2 c^2 \int \frac{d^3 p}{p_0} \frac{d^3 p_1}{p_{01}} \frac{d^3 k_1}{k_1} \delta(\underline{p} + \underline{k} - \underline{p}_1 - \underline{k}_1) F(\xi, \xi_1) [f_e(\vec{p})n(1 + n_{11}) - f_e(\vec{p}_1)(1 + n)n_{11}], \quad (26)$$

причем для краткости не указываются аргументы  $n$  и обозначено  $n_{11} = n(\vec{r}, t, \vec{k}_1)$ .

Первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (26) соответствует ослаблению при рассеянии, а второе — излучению. Интегралы берутся по импульсам электронов до и после рассеяния и по импульсам фотонов, участвующих в процессе рассеяния вместе с фотонами с импульсом  $\vec{k}$ . Дельта-функция отражает законы сохранения (2) и позволяет взять четырехкратный интеграл, так что останется интеграл по пяти переменным, как и в интеграле столкновений Больцмана.

Релятивистски ковариантное уравнение (26) можно рассматривать в любой системе отсчета. Наиболее удобно это делать в системе, связанной с электронным газом, которая называется сопутствующей. При переходе в эту систему мы обезразмерим все наши величины. Импульсы и энергии фотона и электрона будем обозначать безразмерными величинами, положив  $k = mcx$ ,  $\vec{k} = mcx\vec{\omega}$ ,  $p_0 = mc\gamma$ ,  $\vec{p} = mc\vec{z} = mcz\vec{\Omega}$ ,  $\underline{p} = mc\underline{z} = mc\{\gamma, \vec{z}\}$ ,  $\underline{k} = mc\underline{x} = mc\{x, x\vec{\omega}\}$  и соответственно величины с индексом 1:  $x_1 = k_1/mc$  и т. д. Примем также релятивистскую квантовую систему единиц, в которой постоянная Планка, скорость света и масса электрона принимаются в качестве основных единиц:  $\hbar = c = m = 1$ . В этой системе единица длины — комптоновская длина волны  $\hbar/mc$ , энергии —  $mc^2$ , частоты —  $m^2 c^2/\hbar$ , импульса —  $mc$ . Классический радиус электрона совпадает с постоянной тонкой структуры  $r_e = e^2/mc^2 = e^2/\hbar c = 1/137.036$ , а заряд электрона равен  $e = \sqrt{r_e} = 1/\sqrt{137.036}$ .

В сопутствующей системе уравнение (26) записывается так:

$$x \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{r_e^2}{2} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \frac{d^3 z_1}{\gamma_1} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\underline{z} + \underline{x} - \underline{z}_1 - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1) [f_e(\vec{z})n(1 + n_{11}) - f_e(\vec{z}_1)(1 + n)n_{11}], \quad (27)$$

где теперь  $n = n(\vec{r}, t, x, \vec{\omega})$ ,  $n_{11} = n(\vec{r}, t, x_1, \vec{\omega}_1)$ . К уравнению (27) надо добавить граничные и начальные условия.

Заметим, что величина

$$\xi = \underline{x} \underline{z} = x(\gamma - z\vec{\omega}\vec{\Omega}) = \underline{x}_1 \underline{z}_1 = x_1(\gamma_1 - z_1\vec{\omega}_1\vec{\Omega}_1) \quad (28)$$

совпадает с частотой фотона  $x$  при  $z = 0$  и с частотой  $x_1$  при  $z_1 = 0$ . Произведение

$$\xi_1 = \underline{x} \underline{z}_1 = x(\gamma_1 - z_1\vec{\omega}\vec{\Omega}_1) = \underline{x}_1 \underline{z} = x_1(\gamma - z\vec{\omega}\vec{\Omega}) \quad (29)$$

обладает противоположным свойством.

Теперь перейдем к частным случаям геометрии среды и распределения электронов.

3. *Плоская атмосфера тепловых электронов.* Рассмотрим эволюцию спектра излучения в плоскопараллельной среде, заполненной макроскопически неподвижным электронным газом с концентрацией частиц  $n_e$ . Система отсчета, связанная со средой, и является сопутствующей электронному газу.

Рассмотрим случай, когда электроны имеют релятивистское максвелловское распределение  $f_M(\gamma)$ , определяемое формулой (24). Тогда

$$f_M(\gamma_1) = f_M(\gamma)e^{y(\gamma-\gamma_1)} = f_M(\gamma)e^{-y(x-x_1)}. \quad (30)$$

Уравнение (27) для такого случая после взятия интеграла по  $\vec{z}_1$  переписется в виде

$$x \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{r_e^2}{2} n_e \int \frac{d^3 z}{\gamma \gamma_1} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\gamma + x - \gamma_1 - x_1) F(\xi, \xi_1) f_M(\gamma) \left[ n(1 + n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1 + n)n_{11} \right]. \quad (31)$$

Уравнение (31) можно записать по-другому. Не вычисляя интеграла по  $x_1$ , отделим интегралы по импульсам электронов, от которых фотонные функции не зависят. Тогда уравнение запишется в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{\sigma_T}{x} n_e \int_0^\infty x_1 dx_1 \int d^2 \omega_1 R(x, x_1, \mu) \left[ n(1 + n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1 + n)n_{11} \right]. \quad (32)$$

Здесь внутренний двойной интеграл берется по всем направлениям вектора  $\vec{\omega}_1$ , а  $R(x, x_1, \mu)$  — функция перераспределения по частотам и направлениям.

Функция  $R(x, x_1, \mu, \gamma)$  выражается через сечение комптоновского рассеяния и функцию распределения электронов по энергиям. Различные формулы для этой функции были получены несколькими авторами. Ссылки на их работы и полный вывод этих формул содержится в статье [38] и обзоре [81].

Множитель, стоящий справа в уравнении (32) при  $n$ , является коэффициентом ослабления (поглощения) за счет комптоновского рассеяния. Его профиль, как и функция перераспределения, представляется интегралом по распределению импульсов электронов:

$$\bar{s}_0(x, y) = \frac{1}{x} \int f_M(\gamma) \frac{d^3z}{\gamma} \xi s_0(\xi) = \frac{1}{2K_2(y)} \int_1^\infty e^{-y\gamma} \frac{d\gamma}{z} [(\gamma + z)^2 s_0(x(\gamma + z)) + (\gamma - z)^2 s_0(x(\gamma - z))]. \quad (33)$$

Способ численного вычисления этого коэффициента при любых температурах электронов и любых частотах  $x$  дан в статье [41].

Кинетическое уравнение в виде (32) по форме совпадает с уравнениями, которые изучаются в теории переноса излучения. Тот факт, что функция перераспределения зависит не отдельно от направлений фотонов до и после рассеяния, а только от угла рассеяния  $\arccos \mu$ , отражает изотропию среды, где локально нет выделенного направления.

4. *Однородное бесконечное пространство.* Предположим, что тепловой электронный газ однородно заполняет все пространство и в этом пространстве находится изотропное, однородное поле излучения. Электроны и фотоны взаимодействуют через комптоновское рассеяние. Температура электронов поддерживается постоянной каким-то механизмом.

В таком случае среднее число заполнения фотонных состояний зависит только от двух переменных: частоты и времени, так что  $n = n(x, t)$  и  $n_{11} = n(x_1, t)$ . Эта величина определяется уравнением

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{x} \int_0^\infty \left[ \bar{R}(x_1, x) n(x, t) (1 + n(x_1, t)) - \bar{R}(x, x_1) n(x_1, t) (1 + n(x, t)) \right] x_1 dx_1. \quad (34)$$

Здесь функция перераспределения, усредненная по направлениям:

$$\bar{R}(x, x_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 R(x, x_1, \mu) d\mu. \quad (35)$$

Выражения для нее даны в статьях [38, 81].

Уравнение (34) становится определенным, если к нему добавить начальное условие, т. е. задать  $n(x, 0)$ .

Из уравнения (34) вытекает условие сохранения числа фотонов, так как их число не меняется при рассеянии. Действительно, после умножения (34) на  $x^2$  и интегрирования по всем частотам справа получается двойной интеграл, симметричный относительно частот падающего и рассеянного фотонов, и поэтому равный нулю, так что

$$\frac{dN_0}{dt} = 0, \quad N_0 = \int_0^\infty x^2 n(x, t) dx, \quad (36)$$

и, следовательно,

$$N_0 = \int_0^\infty x^2 n(x, t) dx = \int_0^\infty x^2 n(x, 0) dx. \quad (37)$$

Обратимся к предельным случаям приведенных уравнений, когда распределение электронов по импульсам мало отличается от нерелятивистского максвелловского.

5. *Нерелятивистский предел.* Пусть, как и в предыдущем пункте, электроны и фотоны заполняют однородное и изотропное пространство и при этом электронный газ слабо релятивистский (почти нерелятивистский), а поле излучения не очень жесткое, то есть выполняются неравенства  $k_B T \ll mc^2$  и  $h\nu \ll mc^2$ , что означает, что средние энергии электронов и фотонов значительно меньше энергии покоя электрона. Чтобы произвести предельный переход  $y = mc^2/k_B T \rightarrow \infty$ , нам надо переопределить безразмерные частоты фотонов и импульсы электронов. Положим  $x_t = h\nu/k_B T$ , т. е. будем измерять энергии фотонов в средних (по порядку величины) энергиях электронов. Новая безразмерная частота связана со старой соотношением  $x_t = yx$ . Для того чтобы выяснить, как нужно перенормировать импульсы электронов, заметим, что при  $y \rightarrow \infty$  функция  $K_2(y) \sim \sqrt{\pi/2y} e^{-y} (1 + 15/8y)$ . При этом полные энергии электронов близки к их энергиям покоя:  $\gamma = \sqrt{1 + z^2} \sim 1 + z^2/2$ . Следовательно, без учета поправочного слагаемого порядка  $1/y$

$$f_M(\gamma) \sim \left( \frac{y}{2\pi} \right)^{3/2} e^y e^{-y(1+z^2/2)}. \quad (38)$$

Чтобы это распределение перешло в нерелятивистское максвелловское, надо положить  $z\sqrt{y/2}=z_t$  и  $\tilde{z}\sqrt{y/2}=\tilde{z}_t$ . Это равносильно замене  $\vec{p}=mc\sqrt{2/y}\tilde{z}_t$ . Такие же замены сделаем и для величин с индексом 1.

Разложим по степеням  $1/y \ll 1$  все входящие в уравнение (34) сомножители, удерживая нулевую и две первых степени относительно  $1/\sqrt{y}$ . Поскольку смещение частоты при рассеянии на нерелятивистских электронах мало, то в предположении достаточной гладкости среднего числа заполнения можно разложить и эту функцию. При этом аргументом получающейся функции будем считать не  $x$ , как раньше, а  $x_t$ . Для получения той же точности, что и для всех остальных величин, надо учесть слагаемые в формуле Тейлора со второй производной. Остальные множители, стоящие при дифференциалах переменных, по которым ведется интегрирование, тоже раскладываются. Вычислив интегралы по направлениям, получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e}{y} \frac{1}{x_t^2} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[ x_t^4 \left( n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x_t} \right) \right]. \quad (39)$$

Это уравнение, при выводе которого предполагается малость изменения энергии частицы в результате взаимодействия, в результате чего интеграл столкновений преобразуется в дифференциальный оператор, в общей теории кинетических уравнений называется уравнением типа Фоккера—Планка.

6. *Комптонизация.* Этим словом называется процесс формирования спектра излучения в ходе многократного комптоновского рассеяния и его результат. Как правило, рассматривается эволюция спектра от мягкого к более жесткому. Для оценки эффективности этого процесса оценим изменение малой частоты фотона.

Пусть мягкий фотон с частотой  $x$  рассеивается нерелятивистскими электронами с  $z^2 \ll 1$ . Тогда, как можно показать [45, 81], относительное изменение его частоты

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{4}{y} - x. \quad (40)$$

Это соотношение можно представить как дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{du} = x \frac{4}{y} - x^2. \quad (41)$$

Производная здесь берется по безразмерному оптическому расстоянию, совпадающему с числом рассеяний. Уравнение (41) является уравнением Бернулли и его решение легко находится:

$$\frac{1}{x} = e^{-4u/y} \left[ \frac{1}{x_0} + \frac{y}{4} (e^{4u/y} - 1) \right]. \quad (42)$$

Переписанное в величинах  $x_t$  и  $t = u/y$  оно выглядит проще:

$$x_t = x_t^0 \frac{e^{4t}}{1 + \frac{x_t^0}{4} (e^{4t} - 1)} \quad (43)$$

и из него видно, что при малых  $x_t^0$  и умеренных  $t$  частота растет экспоненциально. Затем рост замедляется и частота  $x_t$  стремится к своему асимптотическому значению 4. Мы увидим, что точное значение этого предела равно не 4, а 3.

Далее рассмотрим решения уравнения (39) и его обобщения (34), более точно описывающие многократное рассеяние.

### § 3. Решения кинетических уравнений

1. *Уравнение Компанейца и его свойства.* В этом параграфе опустим индекс  $t$  у частоты (введенный для того, чтобы отличать частоту, измеряемую в единицах  $k_B T/h$ , от частоты, измеряемой в единицах  $mc^2/h$ ) и будем писать просто  $x$ .

Уравнение (39) за счет выбора единицы измерения времени, равной  $y/\sigma_T n_e$ , приводится к уравнению без параметров:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right]. \quad (44)$$

Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно было выведено А. С. Компанейцем в 1952 году (опубликовано [28] в 1956 после рассекретивания) и носит его имя.



Уравнение Компанейца в размерных величинах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e}{mc} \frac{h}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \nu^4 \left( \frac{k_B T}{h} \frac{\partial n_\nu(t)}{\partial \nu} + n_\nu(t) + n_\nu^2(t) \right) \right]. \quad (45)$$

Здесь  $n_\nu(t) = n(x_t, t) = n(x, t)$ . В дальнейшем изучаем это уравнение в форме (44).

Из уравнения (44), так же как и из (34), вытекает закон сохранения числа фотонов. Действительно, после умножения уравнения (44) на  $x^2$  и интегрирования по всем частотам получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty x^2 n(x, t) dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] dx = \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty} = 0. \quad (46)$$

Можно показать, что каждое из трех слагаемых в круглых скобках правой части уравнения Компанейца описывает отдельный эффект, а именно: слагаемое с производной — эффект Доплера,  $n$  — эффект Комптона, а  $n^2$  — вынужденное рассеяние.

Уравнение (44) нелинейное и, к сожалению, точных аналитических решений не имеет. В разное время были найдены точные решения уравнений, получающихся из (44), если отбросить одно или два слагаемых в круглых скобках, т. е. пренебречь одним из указанных эффектов. Приведем все эти решения.

2. *Линейное уравнение и функция Грина.* При небольших числах заполнения  $n \ll 1$  можно не учитывать вынужденное рассеяние и в уравнении (44) отбросить  $n^2$ . Уравнение перейдет в линейное:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right]. \quad (47)$$

Для линейного уравнения можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через начальное распределение фотонов:

$$n(x, t) = \int_0^\infty G(x, x_1, t) n(x_1, 0) dx_1. \quad (48)$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (47):

$$\frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial G}{\partial x} + G \right) \right], \quad (49)$$

с начальным условием

$$G(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1). \quad (50)$$

Интеграл (37) для этой функции переходит в

$$\int_0^\infty x^2 G(x, x_1, t) dx = x_1^2. \quad (51)$$

Функция  $G(x, x_1, t)$  была найдена А. С. Компанейцем путем разложения по собственным функциям (с. ф.) оператора правой части уравнения (47). Подробный вывод ее методом преобразования Лапласа приведен в статье [34]. При  $t \rightarrow \infty$  функция Грина стремится к  $\frac{1}{2} x_1^2 e^{-x}$ , так что решения линейного уравнения Компанейца

имеют предельную стационарную форму в виде функции Вина  $n(x, \infty) = \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^\infty n(x_1, 0) x_1^2 dx_1$ . Действительно,

функция  $C e^{-x}$  удовлетворяет уравнению тождественно при любых коэффициентах  $C$ .

Функция  $x^2 n(x, \infty)$  имеет максимум при  $x = 2$ . Среднее значение частоты по виновскому распределению равно 3. Соотношение (37) выполняется и при  $t = \infty$ . Для сравнения напомним, что согласно формуле Планка максимум распределения числа фотонов  $x^2/(e^x - 1)$  лежит при  $x = 1.59362426014$ , а средняя частота равна 2.70117803292.

В статье [39] были вычислены с. ф., входящие в формулу для функции Грина, и сама эта функция. На рис. 2 и 3 представлены ее графики соответственно при  $x_1 = 0.1, 1$  и  $10$ , отражающие указанные выше свойства. При этом на рис. 2 дана непосредственно функция Грина, а на рис. 3 дается произведение  $x^2 G(x, x_1, t)$ .

3. *Диффузионное решение.* Если отбросить два слагаемых  $n$  и  $n^2$ , что допустимо при малых частотах, то получающееся уравнение

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right] \quad (52)$$

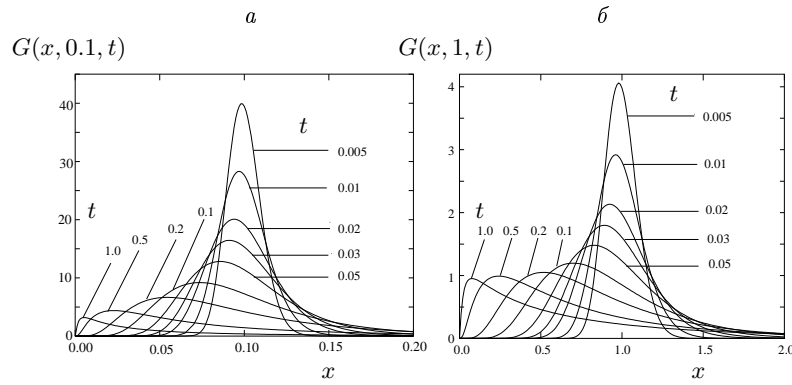


Рис. 2. Эволюция функции Грина  $G(x, x_1, t)$  при  $x_1 = 0.1$  (а) и  $x_1 = 1$  (б).

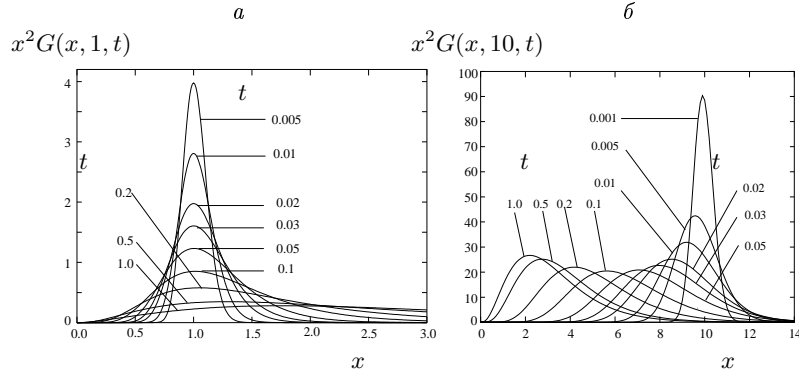


Рис. 3. Эволюция функции  $x^2 G(x, x_1, t)$  при  $x_1 = 1$  (а) и  $x_1 = 10$  (б).

тоже является линейным и для него определяется функция Грина тем же равенством (48), что и выше. Подстановками  $x = e^{u-3y}$ ,  $t = y$  с обратными им  $y = t$ ,  $u = 3t + \ln x$  уравнение (52) приводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^2} = \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (53)$$

Соответствующая функция Грина в исходных переменных

$$G_{\text{dif}}(x, x_1, t) = \frac{1}{2x_1 \sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t} \left(\ln \frac{x}{x_1} + 3t\right)^2\right). \quad (54)$$

Такая форма функции Грина была получена Я. Б. Зельдовичем и Р. А. Сюняевым [105]. Можно показать, что функция (54) является пределом общей функции, определяемой уравнением (49), при малых частотах.

Используя диффузионную функцию Грина (54), авторы статьи [15] показали, что планковский спектр малых частот преобразуется в набор планковских спектров с температурами из некоторого интервала.

4. *Решение стационарного линейного уравнения.* Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (44) переходит в стационарное линейное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^4 \left( \frac{dn}{dx} + n \right) \right] = 0. \quad (55)$$

Это уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dn}{dx} + n = \frac{C_2}{x^4}. \quad (56)$$

Общее решение полученного линейного уравнения

$$n = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \int_{\beta}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (57)$$

Здесь  $\beta > 0$  — некоторое число. Второе решение имеет смысл только при  $x \geq \beta$ . Взять  $\beta = 0$  нельзя, так как эта функция при  $x \rightarrow 0$  стремится к бесконечности так сильно, что интеграл (37) не существует. Первое же решение

описывает распределение Вина, т. е. правильное стационарное решение. Второе решение надо, по-видимому, отбросить как нефизическое.

Решение неоднородного уравнения вида (55), т. е. стационарного уравнения с источниками

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^4 \left( \frac{dn}{dx} + n \right) \right] = f(x) \quad (58)$$

можно искать методом вариации произвольных постоянных, однако его можно получить гораздо проще. Проинтегрируем уравнение по  $x$  от 0 до  $x$ :

$$\left( \frac{dn}{dx} + n \right) = \frac{1}{x^4} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1. \quad (59)$$

Решение получившегося линейного уравнения представляется повторным интегралом

$$n(x) = e^{-x} \int_0^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4} \int_0^{x'} x_1^2 f(x_1) dx_1 = e^{-x} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (60)$$

Функция Грина, определяемая формулой, аналогичной (48):

$$n(x) = \int_0^\infty G(x, x_1) f(x_1) dx_1, \quad (61)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^4 \left( \frac{dG}{dx} + G \right) \right] = \delta(x - x_1) \quad (62)$$

и может быть представлена в явном виде

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \int_{x_1}^x \frac{dx'}{(x')^4}, & x_1 \leq x, \\ 0, & x_1 \geq x. \end{cases} \quad (63)$$

В частном случае степенного спектра источника  $f(x) = x^{\varkappa}$  решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [34]:

$$n(x) = \frac{x^{\varkappa}}{\varkappa(\varkappa + 3)} e^{-x} F(\varkappa, \varkappa + 1, x) \sim \begin{cases} \frac{x^{\varkappa}}{\varkappa(\varkappa + 3)}, & x \ll 1, \\ \frac{x^{\varkappa-1}}{\varkappa + 3}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (64)$$

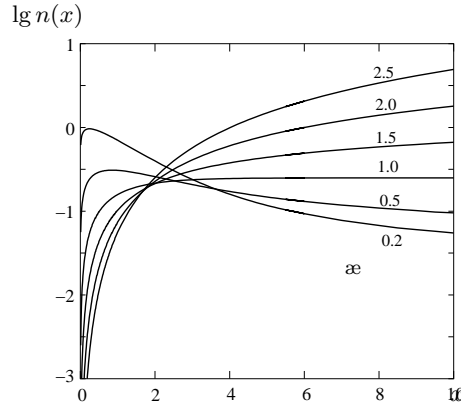


Рис. 4. Стационарные решения линейного уравнения при некоторых показателях степени частотной зависимости источника.

На рис. 4 приведены графики решений для некоторых значений  $\varkappa$ .

5. *Решение недиффузионного уравнения.* Назовем так уравнение, которое получается из уравнения (44), если в его круглых скобках отбросить производную по частоте, определяющую частотную диффузию фотонов. Как видно из уравнения Компанейца в форме (45), это можно сделать при достаточно низкой температуре электронного газа. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^4 (n + n^2)]. \quad (65)$$

Это уравнение обладает свойством автомодельности, а именно для его решений выполняется соотношение подобия: при произвольном  $\alpha > 0$

$$n(\alpha x, t/\alpha) = n(x, t), \quad (66)$$

т. е. противоположное изменение масштабов частот и времени не изменяет решения.

Поскольку уравнение (65) — первого порядка, решаем его методом характеристик. Уравнения, определяющие характеристики (65), записываются так:

$$dt = -\frac{dx}{x^2(1+2n)} = \frac{dn}{3x(n+n^2)}. \quad (67)$$

Первыми интегралами уравнений характеристик являются следующие комбинации переменных:  $x^4 \mathcal{B} = C^4$  и  $4Ct + 2^{1/2} F(\phi, 2^{-1/2})$ , где  $\mathcal{B} = n + n^2$ ,

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_1}} \quad (68)$$

— эллиптический интеграл первого рода, а

$$\phi = \phi(\mathcal{B}) = 2 \operatorname{arctg}(2^{-1/2} \mathcal{B}^{-1/4}). \quad (69)$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию, можно записать в неявном виде [34]

$$t = \frac{F(\phi_0, 2^{-1/2}) - F(\phi, 2^{-1/2})}{2^{3/2} C}, \quad (70)$$

где  $\phi_0 = \phi(\mathcal{B}_0(x_0))$ ,  $\mathcal{B}_0(x) = n(x, 0)[1 + n(x, 0)]$ ,  $C = x \mathcal{B}^{1/4}(x) = x_0 \mathcal{B}_0^{1/4}(x_0)$ .

Если в найденном решении считать, что  $n \gg 1$ , т. е. числа заполнения фотонных состояний велики и вынужденное рассеяние играет определяющую роль, то, подставив предельные выражения  $\mathcal{B} \sim n^2$ ,  $\phi \sim 2^{1/2} n^{-1/2} \ll 1$ ,  $F(\phi, 2^{-1/2}) \sim \phi$ , сведем решение (70) к

$$t = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x_0 n(x_0)} - \frac{1}{x n(x)} \right]. \quad (71)$$

Это решение, полученное Я. Б. Зельдовичем и Е. В. Левичем [16], удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} - 2x^2 n \frac{\partial n}{\partial x} = 4xn^2. \quad (72)$$

На рис. 5, взятом из статьи [34], показано, как эволюционирует начальный спектр  $n(x, 0) = xe^{-x}$  согласно уравнению (65) и его решению (70).

С течением времени спектр смещается в сторону низких частот, причем становится все круче. С некоторого момента спектр опрокидывается, что оказывается возможным из-за неявного вида решения. Причина такого нефизического поведения спектра в том, что когда интенсивность излучения очень резко меняется с частотой, нельзя пренебрегать производной в уравнении Компанейца, несмотря на малый коэффициент при ней. Кроме того, и само это уравнение становится неадекватным, так как при его выводе предполагалась возможность разложения интенсивности по формуле Тейлора, которая отсутствует при большой производной по частоте.

Тот же эффект возникает в решении (71), что можно показать и без вычислений. Действительно, одно из уравнений характеристик уравнения (72) гласит:  $\frac{dx}{dt} = -2x^2 n$ , т. е. скорость изменения частоты  $x$  со временем отрицательна и пропорциональна величине  $n$ . Поэтому чем выше точка на кривой решения, тем быстрее она продвигается в сторону меньших частот.

Эффект пережестота спектра интерпретировался авторами [16] как появление ударной волны в частотном спектре излучения. Для выяснения его реального смысла необходимо получить решения без пренебрежения производной по частоте или точного интегрального уравнения, что возможно только численно.

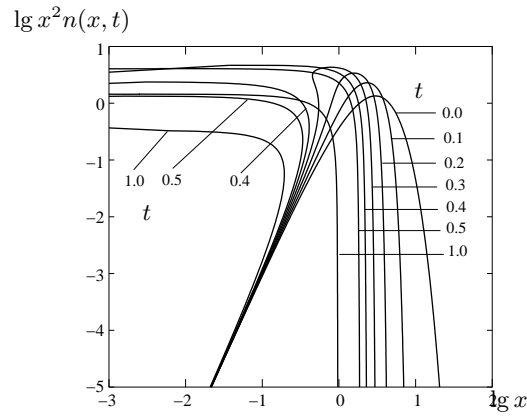


Рис. 5. Решения нелинейного уравнения.

7. *Эволюция однородного поля излучения.* Численные решения интегрального уравнения (34) при максвелловских электронах с низкой температурой без учета вынужденного рассеяния полностью совпали с решениями линейного же уравнения Компанейца. Индуцированное рассеяние, приводящее к нелинейности уравнений, обнаруживает такие особенности решений, которые только угадывались при рассмотрении предельных случаев, обсуждавшихся выше.

Конечно, при решении нелинейного уравнения Компанейца никаких перегибов не возникает. Вместе с тем решения обладают некоторыми особенностями.

Дело в том, что решения линейных уравнений при произвольных начальных распределениях фотонов по энергиям, при которых полное число фотонов конечно, обязательно эволюционируют к равновесному виновскому спектру. Это не всегда осуществляется по отношению к нелинейным уравнениям. Для них предельным является распределение Бозе—Эйнштейна, но согласно этому распределению полное число фотонов не может быть произвольным. Действительно, предельное безразмерное среднее число заполнения фотонных состояний имеет ограничение

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(x - \mu) - 1} \leq \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1} = 2.4041138. \quad (73)$$

Если величина интеграла (37) для начального распределения  $N_0$  превосходит эту границу, то предельного распределения не существует.

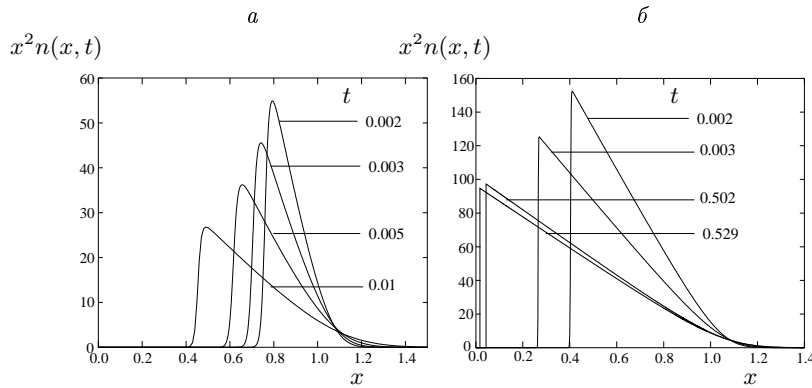


Рис. 6. Эволюция дельтаобразных начальных спектров:  
а — при  $N_0 = 10$ , б — при  $N_0 = 50$ .

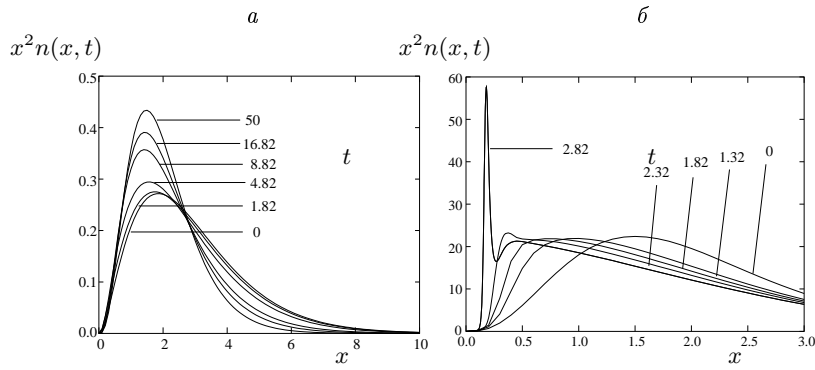
На рис. 6 представлены графики функции  $x^2 n(x, t)$ , вычисленной в работе [42] при начальных распределениях, имитирующих дельта-функцию:

$$n(x, 0) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-(x-x_1)^2/\varepsilon^2}. \quad (74)$$

При расчетах бралось значение  $\varepsilon = 0.01$ . Если при  $N_0 \leq 1$  решения нелинейного уравнения имеют тот же характер, что и на рис. 3, то с увеличением этого параметра сингулярность решений, выражающаяся в крутизне спектра и скорости его приближения к оси ординат, возрастает.

На рис. 7 из той же работы [42] показана эволюция спектра излучения при начальных распределениях

$$n(x, 0) = \frac{8N_0}{3} x e^{-2x}. \quad (75)$$



**Рис. 7.** Эволюция степенно-показательных начальных спектров (75):  
 а — при  $N_0 = 1$ , б — при  $N_0 = 50$ .

Если  $N_0 = 1$ , никаких особенностей в поведении решения не возникает: оно плавно эволюционирует к распределению Бозе—Эйнштейна. Напротив, при  $N_0 = 50$  с приближением к оси ординат возникают выступы, напоминающие ударные фронты или квазилинии. Решения точного, интегрального уравнения демонстрируют указанные явления еще в большей степени, чем полученные в приближении Компанейца.

Здесь мы привели решения уравнений, учитывающих только комптоновское рассеяние. Конечно, необходимо принимать во внимание и другие механизмы излучения и поглощения фотонов. Например, тормозной механизм, с которым сравнивалось комптоновское рассеяние в § 1, должен эффективно поглощать фотоны малых частот и препятствовать их накоплению. Результирующий спектр при этом должен быть планковским.

В заключение укажем объекты, в которых осуществляются условия для большой роли комптоновского рассеяния.

#### § 4. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния

1. *Джеты из активных ядер галактик.* Как показывают наблюдения [75, 82], из активных ядер галактик (АЯГ), в центре которых находится черная дыра массой в  $10^8 \div 10^9 M_\odot$ , происходят выбросы, называемые джетами. Самая распространенная модель джета — струя, состоящая из сгустков. В ходе эволюции сгустков напряженность магнитного поля в них уменьшается от  $\sim 1$  Гс до  $10^{-6}$  Гс, а его энергия как-то при посредстве протонов переходит к электронам, которые оказываются ультрарелятивистскими. Энергии электронов превосходят их энергию покоя на несколько порядков (энергия покоя электрона соответствует температуре  $6 \cdot 10^9$  К). Электроны в магнитном поле излучают синхротронным механизмом фотоны в радиодиапазоне. Излученные фотоны рассеиваются теми же электронами и сильно увеличивают свою энергию, переходя в более энергичную часть спектра, в оптику, рентгеновский и гамма-диапазоны. Этот механизм называется синхрокомптоновским (по-английски synchrotron self-Compton). Различные модели свечения таких источников обсуждаются в работах [76, 64].

Обычно принимается, что распределение электронов по импульсам изотропно, а по энергиям степенное  $\gamma^{-p}$  с характерными значениями  $\gamma$  порядка  $10^2$ – $10^7$  и больше. Тогда синхротронное излучение тоже имеет степенной спектр, пропорциональный  $\nu^{-(p-1)/2}$  (см. Главу III). В результате действия комптоновского механизма в гамма-диапазоне спектра возникает так называемый бамп (bump), т. е. горб. На более высоких частотах интенсивность спектра по различным причинам быстро спадает (завал спектра). Чем дальше простирается степенной спектр электронов, тем на больших частотах происходит завал.

Энергия электронов переходит к фотонам, которые покидают джет. Для поддержания свечения необходима подкачка энергии электронному газу. Имеется несколько моделей такой подкачки. Возможна непрерывная инжекция релятивистских электронов или их ускорение каким-нибудь механизмом. Источником энергии является ядро галактики (central engine). На протяжении заметного времени существует стационарный режим свечения.

2. *Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах.* В таких системах происходит перетекание вещества с обычной звезды на компактную, в результате чего вокруг последней образуется аккреционный диск [61]. Теория аккреционных дисков изложена во многих книгах, например, в [66].

Во внутренней части диска, близкой к аккрецирующему компактному объекту, температура очень большая, там горячий электронный газ рассеивает фотоны, излучаемые каким-нибудь первичным механизмом: синхротронным, тормозным или двойным комптоновским. Рассеянные фотоны могут рождают электрон-позитронные пары, в свою очередь аннигилирующие и дающие фотоны для последующих каскадных процессов рассеяния, рождения и аннигиляции пар [67].

Комптоновскому рассеянию обязано и формирование спектра аккрецирующего вещества одиночных нейтронных звезд [13].

Из полярных областей звезд, окруженных дисками, выбрасываются джеты, масштаб которых значительно меньше, чем в случае АЯГ, так как масса нейтронной звезды или черной дыры здесь порядка массы Солнца. Можно думать, однако, что явления, происходящие в АЯГ и в двойных системах, подобны, так что изучение внутригалактических джетов помогает понять природу активности АЯГ, так как они находятся гораздо ближе к нам и более доступны для наблюдений, а главное, временные, пространственные и энергетические масштабы процессов на них на порядки меньше. Некоторые авторы двойные системы с выбросами вещества называют мини- и микроквазарами [78]. Проблеме образования, строения и свечения дисков и джетов из них посвящены многие статьи сборников, некоторые из которых мы упоминали [61, 96].

3. *Горячие короны аккреционных дисков.* Аккреционные диски образуются около компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр звездных масс) или вокруг черных дыр в центре галактик. Вещество дисков во внешних их частях имеет температуру порядка  $10^5$  К, т. е. частицы там нерелятивистские. Однако короны таких дисков, т. е. более разреженные их оболочки, имеют температуру  $10^9 \div 10^{10}$  К (аналогично, электроны в короне Солнца, температура поверхности которого 6000 К, имеют температуру порядка  $10^6$  К). Механизмы нагрева вещества короны могут быть аналогичны тем, которые действуют на Солнце.

Короны дисков оптически очень тонкие, так что в них рассеивается только малая доля излучения, идущего от диска. Однако рассеянное излучение оказывается в рентгеновском и гамма-диапазоне, где излучения до рассеяния не было совсем и где оно становится доступным наблюдению, так как рассеянные фотоны там очень энергичны [84].

Необходимо принимать во внимание взаимное влияние короны и диска друг на друга [83]. Сравнительно мягкие (УФ) фотоны диска, попадая в корону и рассеиваясь релятивистскими электронами, приобретают большую энергию и способность рождать пары. В свою очередь рассеянное в короне излучение частично возвращается в диск и разогревает его.

Синхротомптонский механизм излучения в таких источниках также изучался, например, в работе [100].

4. *Реликтовое излучение.* Согласно модели горячей Вселенной на ранних этапах ее эволюции она имела очень высокую температуру, так что вещество было полностью ионизовано, а излучение находилось в равновесии с веществом. Спектр излучения был чисто планковским. Несколько процессов возмущали этот спектр. В определенные эпохи остывания Вселенной произошли аннигиляция вещества и антивещества, а затем рекомбинация электронов с атомами. В ходе расширения и, как следствие, остывания вещество и излучение разделились. Однако излучение все время оставалось с большой точностью планковским. Оно дошло до настоящего времени в виде микроволнового космического фона, который называют также, подчеркивая его происхождение от ранних эпох развития Вселенной, реликтовым излучением (РИ) [17].

После эпохи рекомбинации образовались крупномасштабные структуры Вселенной: галактики и скопления галактик. При этих процессах также выделялась значительная энергия. Там, где образовались первичные структуры, излучение получило дополнительный вклад энергии и возникли локальные отклонения от теплового спектра. С течением времени отклонения локальной интенсивности от средней замыкались при рассеянии на электронах, но все же какие-то искажения в пространственном распределении излучения, которое теперь наблюдается в радиодиапазоне как реликтовый тепловой фон с температурой 2.7 К, должны остаться. Расчет замыкания и остаточной анизотропии реликтового излучения представляет большой интерес для космологии. Искажения спектра и их дальнейшая эволюция в значительной степени также определяются рассеянием. При расчетах искажений спектра применяется уравнение Компанейца [15, 22, 102]. Искажения изотропии РИ и его спектра по теоретическим оценкам составляют в настоящее время  $10^{-5}$  от интенсивности РИ и наблюдаются.

Движения первичных структур Вселенной могут порождать поляризацию излучения [65]. Ожидаемая степень поляризации возмущений РИ достигает 10 %, т. е.  $10^{-6}$  от интенсивности самого РИ. В настоящее время технические возможности аппаратуры в радио-диапазоне подошли к такому уровню, который позволяет наблюдать все эти явления.

5. *Горячий газ в скоплениях галактик.* Из наблюдений континуума и линий в рентгеновской области спектра следует, что в богатых скоплениях галактик имеется горячий электронный газ с температурой порядка  $10^8$  К. Масса газа сравнима с массой составляющих скопление галактик (и даже больше ее). Этот газ рассеивает микроволновое реликтовое излучение (РИ) и сдвигает его спектр в сторону больших частот. Фотоны получают дополнительную, хотя не очень большую, но сравнимую с исходной энергию, так что на малых длинах волн излучение усиливается, а на более длинных — ослабляется. Это явление называется эффектом Сюняева—Зельдовича [19]. Обзор наблюдательных данных и теории этого эффекта представлен в работе [86].

Характер искажения спектра отражает также пекулярное движение скопления по отношению к реликтовому фону. Это же движение может создавать поляризацию рассеянного излучения. Наблюдения хода изменения спектра и поляризации РИ по телу не очень далеких скоплений дает возможность выявить распределения плотности, температуры и макроскопической скорости движения электронного газа в скоплениях [85, 103]. Одновременно наблюдения РИ в радиодиапазоне вместе с рентгеновскими позволяют уточнить параметры космологических моделей [86].

6. *Другие объекты.* Комptonовское рассеяние играет заметную роль и в ряде объектов, отличных от указанных выше. Например, межзвездное излучение в Галактике рассеивается энергичными электронами космических лучей [80]. Это излучение сильно неізотропно, так как идет в основном от галактической плоскости. Его преобразование в жесткие диапазоны мешает изучению излучения тех же диапазонов космического происхождения.

Рассчитываются модели звездных атмосфер с учетом комptonовского рассеяния рентгеновского излучения некоторого внешнего источника, например, аккреционного диска [74].

В работе [31] показано, что нелинейный (индуцированный) эффект Комптона способствует нагреву вещества внешних оболочек АЯГ и пульсаров.



§ 1. Описание процессов

1. *Описание процессов с парами.* В релятивистских астрофизических объектах, таких как активные ядра галактик (АЯГ), короны и внутренние области аккреционных дисков вокруг нейтронных звезд и черных дыр, наряду с комптоновским рассеянием большую роль играют процессы, связанные с электрон-позитронными парами. В ходе комптонизации фотоны набирают энергию и становятся способными рождать пары. Последующая их аннигиляция порождает каскадные переходы фотонов в частицы и обратно. Эти процессы учитываются при расчетах моделей АЯГ [97, 95, 73] и аккреционных дисков [99, 60], а также интерпретации наблюдений гамма-всплесков [73] и компактных рентгеновских источников [94].

Выражения для излучательной способности электрон-позитронного газа и для коэффициента поглощения при рождении пар были получены в статьях [90, 91, 92], результаты которых широко используются. В настоящей главе дадим описание этих процессов, следуя указанным работам, а также статьям [35, 40].

В первых нескольких пунктах этого параграфа приведем формулы и соотношения, общие для обоих двухфотонных процессов: аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары. Будем пользоваться в основном безразмерными обозначениями и релятивистской квантовой системой единиц (РКСЕ).

Электроны и позитроны будем называть для определенности частицами с массой или просто частицами, хотя фотоны тоже частицы, но с нулевой массой покоя. Трехмерные и четырехмерные, размерные и безразмерные импульсы частиц и фотонов в произвольной системе отсчета будем обозначать точно так же, как и в предыдущей главе. Заметим, что ряд обозначений в этих главах одинаковы, но некоторые соответствуют полностью совпадающим, а другие различным величинам. Для различения характеристик электронов и позитронов будем снабжать все величины, относящиеся к ним, соответствующими индексами  $\mp$ , например,  $\underline{z}_{\mp}$ . Что касается участвующих в реакциях фотонов, то они равноправны, но за одним из них мы будем следить, т. е. для него будет формулироваться кинетическое уравнение и т.п. Его будем называть основным и приводить его характеристики без индексов. Все величины, относящиеся ко второму фотону будем отмечать индексом 1.

Процесс двухфотонной аннигиляции является, как говорят, другим каналом той же реакции, что и комптоновское рассеяние, и описывается похожими диаграммами Фейнмана (рис. 1), у которых однако начальные и конечные состояния изменены. Рождению пары отвечают те же диаграммы, что и на рис. 1, но перевернутые.

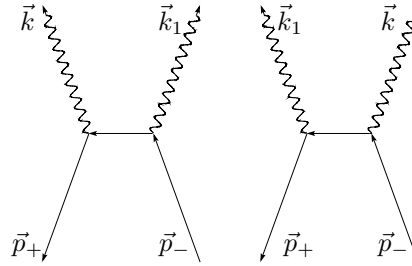


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для аннигиляции пар.

Введем безразмерные обозначения для сумм импульсов и для скалярных произведений

$$\underline{p}_+ + \underline{p}_- = \{p_{0+} + p_{0-}, \vec{p}_+ + \vec{p}_-\} = m\underline{c}\underline{s} = mc\{s_0, \vec{s}\}, \quad (1)$$

$$\underline{k} \underline{k}_1 = m^2 c^2 q, \quad \underline{p}_- \underline{k} = m^2 c^2 \xi, \quad \underline{p}_- \underline{k}_1 = m^2 c^2 \xi_1, \quad (2)$$

так что

$$\underline{s} = \{s_0, \vec{s}\} = \underline{z}_+ + \underline{z}_- = \{\gamma_+ + \gamma_-, \vec{z}_+ + \vec{z}_-\}, \quad \underline{x} \underline{x}_1 = q, \quad \underline{z}_- \underline{x} = \xi, \quad \underline{z}_- \underline{x}_1 = \xi_1. \quad (3)$$

Обозначим также косинусы углов между направлениями импульсов частиц и импульсов фотонов:

$$\zeta = \vec{\Omega}_+ \vec{\Omega}_-, \quad \mu = \vec{\omega} \vec{\omega}_1. \quad (4)$$

Тогда

$$\vec{z}_+ \vec{z}_- = z_+ z_- \zeta, \quad \vec{x} \vec{x}_1 = x x_1 \mu, \quad \underline{x} \underline{x}_1 = x x_1 (1 - \mu) = q. \quad (5)$$

2. *Законы сохранения и их следствия.* При рождении пары электрон-позитрон двумя фотонами и при обратном процессе — двухфотонной аннигиляции — выполняются законы сохранения энергии и импульса, которые в безразмерном виде гласят

$$\underline{z}_+ + \underline{z}_- = \underline{x} + \underline{x}_1 = \underline{s}, \quad \gamma_+ + \gamma_- = x + x_1 = s_0, \quad z_+ \vec{\Omega}_+ + z_- \vec{\Omega}_- = x \vec{\omega} + x_1 \vec{\omega}_1 = \vec{s}. \quad (6)$$

Возведение четырехмерного равенства (6) в квадрат дает

$$1 + \underline{z}_+ \underline{z}_- = \underline{x} \underline{x}_1 = \frac{\underline{s}^2}{2} = \frac{s_0^2 - s^2}{2} = q. \quad (7)$$

Такое же возведение (6) в квадрат после перенесения в другую часть равенства импульсов одного из фотонов и (например) электрона приводит к соотношениям

$$\underline{z}_+ \underline{x} = \underline{z}_- \underline{x}_1 = \xi_1, \quad \underline{z}_+ \underline{x}_1 = \underline{z}_- \underline{x} = \xi. \quad (8)$$

Наконец, после умножения (6) на импульсы фотонов получаем

$$\underline{x}(\underline{z}_+ + \underline{z}_-) = \underline{x}_1(\underline{z}_+ + \underline{z}_-) = \underline{x} \underline{x}_1. \quad (9)$$

Следствия законов сохранения можно записать также в виде

$$s_0^2 - s^2 = 2q, \quad s^2 = x^2 + x_1^2 + 2xx_1\mu = z_-^2 + z_+^2 + 2z_-z_+\zeta, \quad (10)$$

$$\underline{z}_+ \underline{s} = \underline{z}_- \underline{s} = \underline{x} \underline{s} = \underline{x}_1 \underline{s} = \xi + \xi_1 = q, \quad \underline{z}_- \underline{x} = \underline{z}_+ \underline{x}_1 = \xi, \quad \underline{z}_- \underline{x}_1 = \underline{z}_+ \underline{x} = \xi_1, \quad (11)$$

$$\underline{z}_+ \underline{z}_- = \gamma_+ \gamma_- - z_+ z_- \zeta = q - 1. \quad (12)$$

Из первого соотношения в (10) вытекает условие, которое накладывается на значения параметров  $s_0$  и  $q$ :

$$s^2 = s_0^2 - 2q \geq 0, \quad s_0 \geq \sqrt{2q}. \quad (13)$$

Какими бы ни были импульсы электрона и позитрона, всегда выполняется неравенство

$$\underline{z}_+ \underline{z}_- \geq 1 \text{ или } \gamma_+ \gamma_- \geq 1 + \vec{z}_+ \vec{z}_-, \quad (14)$$

которое после возведения в квадрат приводится к очевидному неравенству  $|\vec{z}_+ - \vec{z}_-|^2 + |\vec{z}_+ \times \vec{z}_-|^2 \geq 0$ . Из (12) и (14) следует неравенство для импульсов фотонов:

$$q = xx_1(1 - \mu) \geq 2, \quad xx_1 \geq \frac{2}{1 - \mu}. \quad (15)$$

Во всяком случае  $xx_1 \geq 1$ . Не любые фотоны могут родить пару или образоваться при ее аннигиляции.

3. *Система центра масс.* В системе отсчета центра масс оба фотона и обе частицы равноправны, то есть у них одинаковые импульсы и противоположные направления, так что  $s^0 = 0$ ,  $s_0^0 = \sqrt{2q}$ . Поэтому системе центра масс отвечают значения характеристик частиц

$$\gamma_+^0 = \gamma_-^0 = \gamma, \quad z_+^0 = z_-^0 = z = \sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad \zeta^0 = -1, \quad \beta = \frac{z}{\gamma}, \quad (16)$$

и фотонов

$$x_1^0 = x_2^0 = \gamma, \quad \mu^0 = -1. \quad (17)$$

Из равенств (5) и (17) следует, что

$$2\gamma^2 = q, \quad \gamma = \sqrt{q/2}, \quad z = \sqrt{q/2 - 1}. \quad (18)$$

Обозначим косинус угла между импульсами позитрона и одного из фотонов (без индекса) в системе центра масс через  $\eta$  и введем некоторый азимут  $\psi$ . Тогда для скалярных произведений импульсов фотонов и частиц (8) в этой системе получим

$$\xi = \gamma(\gamma - z\eta), \quad \xi_1 = \gamma(\gamma + z\eta). \quad (19)$$

Напомним, что в случае фотонов инвариантны как само отношение  $d^3x/x = x dx d^2\omega$ , так и его части, а именно  $dx/x$  и элемент поверхности на сфере радиуса  $x$ , т.е.  $x^2 d^2\omega$ . Этот инвариант  $x^2 d^2\omega$  при переходе в систему центра масс преобразуется в  $\gamma^2 d\eta d\psi$ . В этом выражении от переменной  $\eta$  можно перейти к переменной  $\xi$ , так как  $d\xi = -\gamma z d\eta$ . Таким образом, элемент площади на сфере радиуса, равного импульсу основного фотона, может быть представлен в инвариантных координатах  $\xi$  (или  $\eta$ ) и  $\psi$  в виде  $\gamma^2 d\eta d\psi$  или  $d\psi d\xi/\beta$ , где  $\beta = z/\gamma$  — безразмерная скорость частиц в системе центра масс.

4. *Дифференциальные сечения процессов.* Методами квантовой электродинамики показывается (см. [6]), что инвариантное дифференциальное сечение двухфотонной аннигиляции в произвольной системе отсчета определяется формулой, которую можно записать в альтернативных видах:

$$\sigma_{\text{ann}} = \frac{r_e^2}{2} \frac{F}{4\gamma^3 z} = \frac{r_e^2}{2} \frac{(1 - \beta^2)^2}{4\beta} F = \frac{r_e^2}{2} \frac{F}{q^{3/2} \sqrt{q - 2}}. \quad (20)$$

Здесь  $r_e$  — классический радиус электрона, симметричная функция двух аргументов

$$F = F(\xi, \xi_1) = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi} + 2 \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1} \right) - \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1} \right)^2, \quad (21)$$

а инвариантные величины  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $q$ ,  $\gamma$ ,  $z$  и  $\beta$  были определены выше. После подстановки в (21) выражений для  $\xi$  и  $\xi_1$  из (19) получим выражение  $F$  через переменные  $\beta$  и  $\eta$ :

$$F = 2 \frac{1 - \beta^4 \eta^4 + 2(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \eta^2) - 2(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta^2 \eta^2)^2}. \quad (22)$$

Дифференциальное сечение рождения пар определяется так, что оно отличается от (20) на множитель  $\beta^2$  [6]:

$$\sigma_{\text{bth}} = \beta^2 \sigma_{\text{ann}} = \frac{r_e^2 \beta}{2 \cdot 4\gamma^4} F. \quad (23)$$

5. *Полные сечения процессов.* Полное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары определяется формулой

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \frac{r_e^2}{4} \frac{1}{v_r \underline{z}_- \underline{z}_+} \int \frac{d^3 x}{x} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1). \quad (24)$$

Здесь безразмерная относительная скорость частиц согласно формуле (I.63)  $v_r = \sqrt{1 - 1/(\underline{z}_- \underline{z}_+)^2}$ , так что

$$v_r \underline{z}_- \underline{z}_+ = \sqrt{(\underline{z}_- \underline{z}_+)^2 - 1} = \sqrt{(q-1)^2 - 1} = \sqrt{q(q-2)} = 2z\gamma = 2\beta\gamma^2. \quad (25)$$

Этот множитель учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Покажем, как вычисляется это сечение. После взятия интеграла по  $\underline{x}_1$  преобразование дельта-функции производится так:

$$\begin{aligned} \delta(s_0 - x - |\vec{s} - \vec{x}|) &= \delta\left(\frac{s_0^2 + x^2 - 2s_0x - s^2 - x^2 + 2\vec{s}\vec{x}}{2x_1}\right) = \\ &= x_1 \delta(q - \underline{s}\underline{x}) = \frac{xx_1}{q} \delta\left(x - \frac{q}{s_0 - s \cos \theta}\right) = \frac{xx_1}{2\gamma^2} \delta\left(x - \frac{q}{s_0 - s \cos \theta}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставив (25) и (26) в (24), выразим полное сечение через дифференциальное (20):

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{8\beta\gamma^4} \int x^2 d^2\omega F = \frac{1}{2} \int x^2 d^2\omega \sigma_{\text{ann}}. \quad (27)$$

Множитель  $1/2$  введен для того, чтобы ввиду тождественности аннигиляционных фотонов не учитывать их дважды.

Для нахождения явного выражения для полного сечения аннигиляции (24) удобнее производить интегрирование не по направлениям импульса фотона, а в инвариантных переменных  $\eta$  и  $\psi$ , определенных выше. Для этого надо вместо  $x^2 d^2\omega$  подставить  $\gamma^2 d\eta d\psi$ . Поскольку основной множитель сечения — функция  $F$  — от угла  $\psi$  не зависит, интеграл по этой переменной можно заменить на  $2\pi$ .

Таким образом, вычисление полного сечения сводится к нахождению интеграла

$$F_0(\beta) = \int_0^1 F d\eta = 2[(3 - \beta^4)a(\beta) - 2 + \beta^2], \quad a(\beta) = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}. \quad (28)$$

В результате получается выражение для полного сечения [6], которое мы представим в виде

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \pi r_e^2 s_{\text{ann}}(\beta), \quad s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1 - \beta^2}{4\beta} F_0(\beta) = \frac{(3 - \beta^4)a(\beta) - (2 - \beta^2)}{2\beta\gamma^2}. \quad (29)$$

Полное сечение рождения пары определяется аналогично (24) с очевидными заменами характеристик частиц и фотонов:

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \frac{r_e^2}{2x \underline{x}_1} \int \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F = \frac{r_e^2}{2q} \int \frac{d^3 z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta(\gamma_+ - s_0 + \gamma_-) F. \quad (30)$$

Множитель  $\underline{x}\underline{x}_1 = q$  вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов. Дополнительная двойка в знаменателе не вводится, так как рождаются не тождественные частицы. При переходе к последнему выражению в (30) взят интеграл по  $\vec{z}_+$ , так что вместо этого вектора надо подставить  $\vec{z}_+ = \vec{s} - \vec{z}_- = \vec{x} + \vec{x}_1 - \vec{z}_-$ . Стоящее под знаком интеграла в указанном выражении произведение преобразуем следующим образом. Сначала домножим аргумент  $\delta$ -функции на  $\gamma_+ + s_0 - \gamma_- = 2\gamma_+ = 2\sqrt{(\vec{s} - \vec{z}_-)^2 + 1}$ , затем сделаем аргументом ее  $\cos\theta_-$ :

$$\frac{d^3z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta\left(\frac{1 + s^2 + z_-^2 - 2\vec{s}\vec{z}_- - \gamma_-^2 - s_0^2 + 2s_0\gamma_-}{2\gamma_+}\right) = \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \delta(\underline{s}\underline{z}_- - q) = \sin\theta_- d\theta_- \delta\left(\cos\theta_- - \frac{s_0\gamma_- - q}{s z_-}\right) \frac{d\gamma_-}{s} d\varphi. \quad (31)$$

Подставив результат в (30) и взяв интеграл по  $\theta_-$ , получим

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \frac{r_e^2}{2qs} \int F d\gamma_- d\varphi. \quad (32)$$

Рассчитывать полное сечение рождения пар заново не надо, так как оно выражается через сечение аннигиляции. Действительно, принимая во внимание (23) и подставляя  $d\gamma_- d\varphi = (s\beta/2)d\eta d\psi$ , получаем из (32) [6]

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \gamma^2 \int \sigma_{\text{bth}} d\eta d\psi = \frac{\pi r_e^2}{4} \frac{\beta}{\gamma^2} \int_{-1}^1 F d\eta = 2\beta^2 \sigma_{\text{ann}}^0. \quad (33)$$

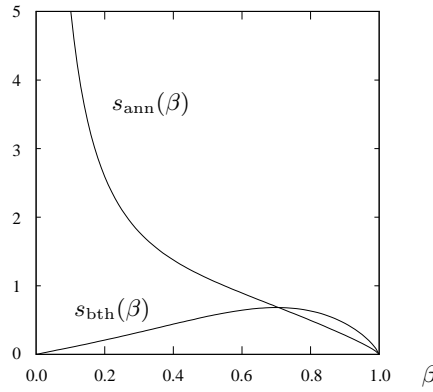


Рис. 2. Полные сечения аннигиляции и рождения пары.

На рис. 2 изображены графики полных сечений аннигиляции и рождения пар. Первое из них обращается в бесконечность при  $\beta \rightarrow 0$  как  $1/(2\beta)$ , что отражает большую вероятность аннигиляции покоящихся друг относительно друга электрона и позитрона. Оба сечения имеют бесконечную производную при  $\beta = 1$ .

6. *Средние степени частоты фотонов.* Определим среднюю степень частоты излучаемого фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары равенством

$$\bar{x}^l s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1}{16\pi\gamma^3 z} \int F x^{l+2} d^2\omega. \quad (34)$$

Вычисление проще всего произвести в системе центра масс по углам в системе аннигиляционного базиса, т. е. по  $\eta$  и  $\psi$ , заменив элемент площади поверхности безразмерной частоты по правилу  $x^2 d^2\omega \rightarrow \gamma^2 d\eta d\psi$ . При этом надо сделать замены углов, выразив их через  $\eta$  и  $\psi$ . Через те же переменные выражаются и частоты фотонов. Инвариантное сечение процесса (20) тоже является функцией  $\eta$  и не зависит от азимута  $\psi$ .

Теперь просто вычисляются интегралы в (34), так как они выражаются через моменты функции  $F$  по  $\eta$ . Рассмотрим значения  $l = 0, 1, 2$ . Наряду с (28) нам понадобится еще один интеграл

$$F_2(\beta) = \int_0^1 F \eta^2 d\eta = \frac{2}{\beta^2} \left[ (5 - 4\beta^2 + \beta^4) a(\beta) - 5 + \frac{8}{3}\beta^2 \right]. \quad (35)$$

При  $l = 0$  находим уже известную формулу  $s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{F_0(\beta)}{4\beta\gamma^2}$ . Величина средней частоты оказывается тривиальной:  $\bar{x} s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{s_0}{2} s_{\text{ann}}(\beta)$ , т. е.  $\bar{x} = \bar{x}_1 = s_0/2$ , так как аннигиляционные фотоны равноправны.

Средний квадрат частоты

$$\overline{x^2} s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1}{4} \left[ \left( s_0^2 + \frac{s^2}{2} \sin^2 \epsilon_p \right) s_{\text{ann}}(\beta) + \frac{s^2}{4\gamma z} \left( \cos^2 \epsilon_p - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon_p \right) F_2(\beta) \right], \quad (36)$$

где  $\epsilon_p$  — угол между вектором  $\vec{s}$  и импульсом электрона в системе центра масс.

Две последние формулы дают возможность найти дисперсию частот аннигиляционных фотонов

$$Dx = Dx_1 = \frac{s^2}{8} \left[ \sin^2 \epsilon_p + (2 - 3 \sin^2 \epsilon_p) \frac{F_2(\beta)}{F_0(\beta)} \right]. \quad (37)$$

Дисперсия пропорциональна квадрату длины суммы импульсов аннигилирующих частиц. При аннигиляции неподвижных частиц она равна нулю, так как частоты фотонов в этом случае точно равны энергии покоя электрона.

## § 2. Кинетическое уравнение для фотонов при процессах с парами

1. *Функции распределения.* В этой главе будем использовать, в общем, те же функции распределения по импульсам частиц и фотонов, что и в предыдущей. Однако, здесь допустим, что электрон-позитронный газ может быть вырожденным. Тогда распределения частиц удобнее характеризовать, как и фотоны, средними числами заполнения их состояний. Для средних чисел заполнения выполняются обычные условия нормировки, которые в безразмерных обозначениях и в сопутствующих системах отсчета каждого из газов, где средний импульс частиц этих газов равен нулю, записываются в виде

$$\frac{2}{\lambda_C^3} \int n_{\mp}(\vec{z}) d^3 z = n_{\mp}^0, \quad \frac{2}{\lambda_C^3} \int n(\vec{x}) d^3 x = n^0. \quad (38)$$

Здесь  $\lambda_C = h/mc$  — комптоновская длина волны. Через  $n_{\mp}^0$  и  $n^0$  обозначены концентрации частиц и фотонов в сопутствующих системах. Эти скалярные величины могут быть заданы или определяться из каких-либо условий в зависимости от задачи. Если принять релятивистскую квантовую систему единиц (РКСЕ), в которой  $m = c = \hbar = 1$ , то следует положить  $\lambda_C = 2\pi$ .

2. *Формулировка кинетического уравнения.* Явно релятивистски ковариантное кинетическое уравнение для фотонов, в котором учитываются только двухфотонные аннигиляции и рождения электрон-позитронных пар, в размерных обозначениях записывается в виде

$$\begin{aligned} \underline{k} \nabla n(\vec{k}) &= \frac{r_e^2 2m^2 c^2}{2 h^3} \int \frac{d^3 k_1}{k_1} \frac{d^3 p_-}{p_{0-}} \frac{d^3 p_+}{p_{0+}} \delta(\underline{p}_- + \underline{p}_+ - \underline{k} - \underline{k}_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ &\times \{n_-(\vec{p}_-) n_+(\vec{p}_+) [1 + n(\vec{k})] [1 + n(\vec{k}_1)] - n(\vec{k}) n(\vec{k}_1) [1 - n_-(\vec{p}_-)] [1 - n_+(\vec{p}_+)]\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Наличие  $\delta$ -функции отражает законы сохранения. Величина  $F$  определяется формулой (21).

В (39) принято во внимание, что средние числа заполнения фотонных состояний могут быть не малы, т. е. фотонный газ может быть вырожден. Допускается вырождение и газов частиц. Поэтому в кинетическое уравнение введены множители, учитывающие принцип Паули для частиц-фермионов и принцип вынужденных переходов для фотонов, как бозонов. Как всегда в подобных случаях, произведения четырех функций в фигурных скобках в (39) взаимно уничтожаются.

Впредь используем только безразмерные обозначения величин. Кинетическое уравнение в безразмерном виде в РКСЕ имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{x} \nabla n(\vec{x}) &= D_e \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ &\times \{n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) [1 + n(\vec{x})] [1 + n(\vec{x}_1)] - n(\vec{x}) n(\vec{x}_1) [1 - n_-(\vec{z}_-)] [1 - n_+(\vec{z}_+)]\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $D_e = r_e^2 / \lambda_C^3$ .

Из кинетического уравнения вытекают равновесные распределения частиц и фотонов при условии равновесия процессов аннигиляции и рождения пар. При этом условии выражение, стоящее в фигурных скобках в (40), равно нулю. Это равенство должно быть следствием законов сохранения. При этом в равновесные распределения должны входить единая температура  $T$ , единая скорость относительно общей сопутствующей системы

отсчета  $\vec{v}$  и соблюдаться баланс числа частиц (сохранение заряда и “двухфотонность” процессов). Следовательно, в равновесии выполняются распределения Ферми—Дирака для частиц и распределение Бозе—Эйнштейна для фотонов. В сопутствующей системе

$$n_{\pm}(\vec{z}_{\pm}) = \frac{1}{e^{y(\gamma_{\pm} + \mu_{\pm})} + 1}, \quad n(\vec{x}) = \frac{1}{e^{y(x + \mu_{\gamma})} - 1}, \quad (41)$$

где по-прежнему  $y = mc^2/k_B T$ , а  $-\mu_{\pm}$  и  $-\mu_{\gamma}$  — безразмерные (в единицах  $mc^2$ ) химические потенциалы частиц и фотонов. При этом между химическими потенциалами должно выполняться соотношение  $\mu_{-} + \mu_{+} = 2\mu_{\gamma}$ .

Если газы не вырождены, то распределения частиц в сопутствующих системах отсчета переходят в релятивистские максвелловские, а химические потенциалы прямо выражаются через концентрации, так что в сопутствующих системах

$$n_{\pm}(\vec{z}) = C_{\pm} e^{-y\gamma}, \quad C_{\pm} = e^{-y\mu_{\pm}} = n_{\pm}^0 \frac{\lambda_C^3 y}{8\pi K_2(y)}, \quad (42)$$

где  $K_2(y)$  — функция Макдональда. В случае фотонов надо перейти к пределу нулевой массы покоя, тогда  $\gamma$  заменится на  $x$ , а  $K_2(y)$  на  $2/y^2$  и формула (42) перейдет в формулу  $n(x) = e^{-y(x + \mu_{\gamma})}$ , похожую на формулу Вина, но с возможным дополнительным множителем, содержащим химический потенциал. Если при этом химический потенциал фотонов равен нулю, то осуществляется точное распределение Вина, а произведение  $C_{-}C_{+} = 1$ .

3. *Кинетическое уравнение в форме уравнения переноса излучения.* Поделив РКУ (40) на частоту фотона и сократив произведения четырех функций распределения, представим его в виде, обычном для уравнения переноса излучения. Запишем и его в безразмерных обозначениях:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n(\vec{x}) = -n(\vec{x})(\alpha_{\gamma} - \alpha_{-} - \alpha_{+}) + \varepsilon[1 + n(\vec{x})] + \varepsilon_{*}. \quad (43)$$

Здесь введены обозначения для интегралов, входящих в РКУ:

$$\alpha_{\gamma}(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_{-}}{\gamma_{-}} \frac{d^3 z_{+}}{\gamma_{+}} \delta_{*} F(\xi, \xi_1), \quad (44)$$

$$\alpha_{\mp}(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_{-}}{\gamma_{-}} \frac{d^3 z_{+}}{\gamma_{+}} \delta_{*} F(\xi, \xi_1) n_{\mp}(\vec{z}_{\mp}), \quad (45)$$

$$\varepsilon(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_{-}}{\gamma_{-}} \frac{d^3 z_{+}}{\gamma_{+}} \delta_{*} F(\xi, \xi_1) n_{-}(\vec{z}_{-}) n_{+}(\vec{z}_{+}), \quad (46)$$

$$\varepsilon_{*}(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_{-}}{\gamma_{-}} \frac{d^3 z_{+}}{\gamma_{+}} \delta_{*} F(\xi, \xi_1) n_{-}(\vec{z}_{-}) n_{+}(\vec{z}_{+}). \quad (47)$$

Здесь для краткости дельта-функция, отражающая законы сохранения, обозначена  $\delta_{*} = \delta(\vec{z}_{-} + \vec{z}_{+} - \vec{x} - \vec{x}_1)$  сокращенно. Все введенные интегралы имеют размерность обратной длины. Интегралы (44)–(45) определяют поглощение фотонов, два последних — излучение.

Если умножить уравнение (43) на  $d^3 x$  и проинтегрировать по импульсам фотонов, то получится соотношение, представляющее первый момент уравнения:

$$\nabla \int \underline{x} n(\vec{x}) \frac{d^3 x}{x} = - \int d^3 x n(\vec{x}) [\alpha_{\gamma}(\vec{x}) - \alpha_{-}(\vec{x}) - \alpha_{+}(\vec{x})] + \int d^3 x \{ \varepsilon(\vec{x}) [1 + n(\vec{x})] + \varepsilon_{*}(\vec{x}) \}. \quad (48)$$

Рассмотрим по очереди части уравнения (43).

4. *Поглощение.* Установим связь введенных коэффициентов с сечениями рассматриваемых процессов. Начнем с трех коэффициентов, связанных с рождением пар. Перепишем определение коэффициента спонтанного поглощения через полное сечение рождения пар (33):

$$\alpha_{\gamma} = \frac{2}{\lambda_C^3 x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) q \sigma_{\text{bth}}^0(\beta). \quad (49)$$

Множитель  $q = \underline{x} \underline{x}_1 = x x_1 (1 - \mu)$  вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов, при этом в (49) сокращаются энергии фотонов, т. е.  $x$  и  $x_1$ . Величина  $q = 2\gamma^2$ , где  $\gamma$  — общее значение энергий частиц и фотонов в системе центра масс частиц, в которой электрон и позитрон, как и фотоны, движутся в противоположные стороны. Величина  $\beta$ , являющаяся формальным аргументом сечения, — соответствующая скорость  $\beta = z/\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$ .

Два других коэффициента  $\alpha_{\mp}$ , стоящих в слагаемом поглощения, но со знаком минус, выразим через дифференциальное сечение рождения пары:

$$\alpha_{\mp} = \frac{1}{x} \frac{2}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d\varphi d\gamma_-}{s} \frac{4\gamma_-^5}{z} \sigma_{\text{bth}} n_{\mp}(\vec{z}_{\mp}) = \frac{1}{x} \frac{4}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \gamma^4 d\eta d\psi \sigma_{\text{bth}} n_{\mp}(\vec{z}_{\mp}). \quad (50)$$

Здесь  $\sigma_{\text{bth}}$ , зависящее от  $\beta$  и  $\eta$ , подставлено в согласии с выражением для этого сечения (23).

5. *Излучение.* Начнем с интеграла от коэффициента излучения по импульсам излучаемых фотонов. Этот интеграл входит в соотношение (48). Исходя из (46) и выражения для полного сечения аннигиляции (29), находим

$$\varepsilon_0 = \int \varepsilon(\vec{x}) d^3 x = \frac{r_e^2}{2} \frac{2}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3 x}{x} \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta_* F n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) = \frac{4}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) v_{\underline{z}_- \underline{z}_+} \sigma_{\text{ann}}^0(\beta). \quad (51)$$

Здесь использовано то же обозначение  $\delta_*$ , что и в формулах (44)–(47),  $v_{\underline{z}_- \underline{z}_+}$  — безразмерная и инвариантная относительная скорость частиц, так что справедлива формула (25). При этом надо считать, что  $q = 1 + \underline{z}_- \underline{z}_+$ . Множитель (25), как и  $\underline{x}_1$  в случае рождения пар, учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Сам коэффициент излучения (46) не выражается прямо через полное сечение аннигиляции, так как не содержит интеграла по  $x$ . Однако наличие  $\delta$ -функции позволяет взять интегралы по четырем переменным. При этом, хотя излучение происходит при аннигиляции, закрепленным является импульс излучаемого фотона. Поэтому удобнее произвести интегрирование по импульсам частиц, а импульсы фотонов считать заданными. Интегралы получаются такие же, какие возникали при рассмотрении процесса рождения пар, и дельта-функция преобразуется так же, как в (26). В результате получится

$$\varepsilon(\vec{x}) = \frac{4}{x \lambda_C^3} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \gamma^4 d\eta d\varphi_0 \sigma_{\text{bth}} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+). \quad (52)$$

Импульсы частиц должны быть выражены через переменные интегрирования.

Конечно, в (52) можно заменить сечение рождения на сечение аннигиляции с соответствующим множителем. Однако, лучше оставить сечение рождения, так как закрепленными являются импульсы фотонов. Заметим, что величина  $\varepsilon_*$  не требует специального рассмотрения, так как отличается от (52) только наличием под интегралом дополнительного множителя  $n(\vec{x}_1)$ .

### § 3. Усреднение коэффициентов

1. *Усреднение коэффициента спонтанного поглощения.* Предположим, что распределения частиц и фотонов по импульсам в сопутствующей системе отсчета изотропны, т. е. зависят только от величин импульсов, но не от их направлений.

При таком предположении нет необходимости знать и зависимости от направлений входящих в выражения для коэффициентов поглощения и излучения интегралов. Поэтому мы проинтегрируем по направлениям в этих интегралах. Зависимости распределений от времени и координат по-прежнему не указываем.

Начнем с того коэффициента поглощения, который определяется спонтанным процессом рождения частиц. Исходим из приводившейся выше формулы (44). Вычислим сначала интеграл при  $n(\vec{x}) = n(x)$ . Отделим интеграл по частоте от интегралов по углам и выберем в качестве полярного угла угол между направлениями фотонов, косинус которого  $\mu$ . При этом от азимута ничего не зависит и интеграл по нему заменяется на  $2\pi$ . При рождении пары должно выполняться условие  $q = \underline{x}_1 = x x_1 (1 - \mu) \geq 2$ , которое определяет пределы интегрирования по  $x_1$  и  $\mu$ :

$$\alpha_{\gamma}(x) = \frac{D_e}{x} 4\pi^2 \int_{1/x}^{\infty} x_1 dx_1 n(x_1) \int_{-1}^{1-2/(xx_1)} d\mu q 2\beta^2 s_{\text{ann}}(\beta). \quad (53)$$

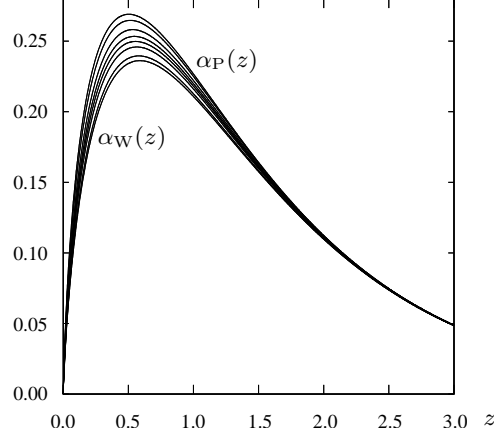
В случаях, когда распределение  $n(x_1)$  планковское, виновское или более общее распределение Бозе–Эйнштейна с параметром  $y = mc^2/(k_B T)$ , функция  $\alpha_{\gamma}(x, y)$ , как можно показать, фактически зависит от частоты через отношение  $y/x$ . Представим эту зависимость в виде

$$\alpha_{\gamma}(x, y) = 32\pi^2 D_e \frac{e^{-y\mu_{\gamma}}}{y^3} \alpha_{\text{BE}}\left(\frac{y}{x}, y\mu_{\gamma}\right), \quad (54)$$

где значение  $\mu_{\gamma} = 0$  формально отвечает распределению Планка, а  $\mu_{\gamma} = \infty$  — Вина, соответствующие функции обозначим  $\alpha_{\text{P}}(z) = \alpha_{\text{BE}}(y/x, 0)$  и  $\alpha_{\text{W}}(z) = \alpha_{\text{BE}}(y/x, \infty)$ .

На рис. 3 представлены графики этих функций. Как и следовало ожидать, планковская функция больше виновской,  $\alpha_P(z) > \alpha_W(z)$ , но существенное отличие обнаруживается при значениях аргумента порядка единицы. Кривые при конечных ненулевых значениях  $\tau$  располагаются между крайними. В нуле у всех этих функций бесконечная (логарифмическая) производная, например,  $\alpha_W(z) \sim (z/2) \ln(1/z)$  при  $z \rightarrow 0$ . При больших  $z$  все они имеют общую асимптотику:

$$\alpha_{BE}(z, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(m-1)\tau}}{m^3} \alpha_W(mz) \sim \alpha_W(z) \sim \frac{\sqrt{\pi z}}{4} e^{-z}. \quad (55)$$

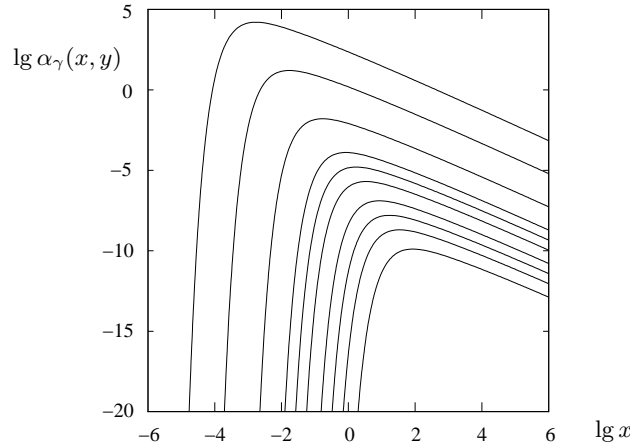


**Рис. 3.** Функции  $\alpha_{BE}(z, \tau)$  при (сверху вниз)  $\tau = 0$  ( $\alpha_P(z)$ ), 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0,  $\infty$  ( $\alpha_W(z)$ ).

Рис. 4 дает представление о коэффициенте поглощения при рождении пар в результате взаимодействия с виновским излучением. Изображены графики функции

$$\alpha_\gamma(x, y) = 32\pi^2 D_e \frac{1}{y^3} \alpha_W(y/x) = \frac{4}{\pi} \alpha_{fs}^2 \frac{1}{y^3} \alpha_W(y/x). \quad (56)$$

в зависимости от частоты при различных температурах  $T = \frac{mc^2}{k_B y}$ . Поведение этой функции при малых и больших частотах отражается ее асимптотиками:  $\alpha_\gamma(x, y) \sim \alpha_{fs}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi x y^5}} e^{-y/x}$  при  $x \ll y$  и  $\alpha_\gamma(x, y) \sim \frac{2}{\pi} \alpha_{fs}^2 \frac{1}{x y^2} \ln \frac{y}{x}$  при  $x \gg y$ . Для перевода коэффициента к размерному выражению функцию (56) надо разделить на  $\lambda_C = 3.861411 \cdot 10^{-11}$  см, а графики поднять на 10.41. Поглощение становится очень сильным при малых  $y$ , т. е. высоких температурах излучения. Максимумы кривых находятся на прямой  $x = 1.7y$ , т. е. при высоких температурах легче поглощаются более мягкие фотоны.



**Рис. 4.** Функция  $\alpha_\gamma(x, y)$  при (сверху вниз)  $y = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0$ .

Выражение для функции  $\alpha_\gamma$  получено в [91] и в несколько другом виде в [71]. При виновском распределении фотонов в [92] для нее найдено эмпирическое представление.



Несколько сложнее производится усреднение вынужденного поглощения, так как два коэффициента  $\alpha_{\mp}$  содержат как фотонное распределение по импульсам, так и распределения частиц.

2. *Усреднение излучения.* Для коэффициента излучения из (46) при изотропных распределениях частиц получаем

$$\varepsilon(x) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \frac{d^3z_+}{\gamma_+} \delta_* F n_-(\gamma_-) n_+(\gamma_+) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} \frac{d^3z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta(\gamma_- + \gamma_+ - x_1 - x) F n_-(\gamma_-) n_+(\gamma_+), \quad (57)$$

где  $\delta_*$  то же, что и в (44).

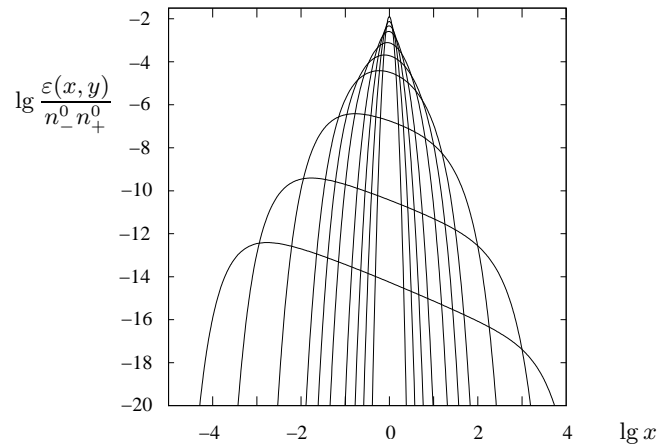
Следующий шаг — усреднение по направлениям импульса фотона  $\vec{x}_1$ .

Когда газы частиц подчиняются максвелловским законам (42) с одной и той же температурой, формула для коэффициента излучения (57) сильно упрощаются. Это происходит потому, что произведение распределений  $n_-(\gamma_-)n_+(\gamma_+)$  пропорционально экспоненте  $e^{-y(\gamma_-+\gamma_+)}$ , которая в силу закона сохранения энергии равна  $e^{-y(x+x_1)}$  и не зависит от энергий частиц. Результирующее выражение для коэффициента спонтанного излучения в единицах РКСЕ имеет вид

$$\varepsilon(x, y) = 32\pi^2 D_e e^{-y(\mu_- + \mu_+)} \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W(y/x), \quad (58)$$

$\alpha_W(y/x)$  — уже упоминавшаяся функция. Таким образом, коэффициент излучения существенным образом зависит только от отношения  $y/x$ . Он вычислялся в работах [104] и [90].

Заметим, что отношение коэффициента излучения и коэффициента поглощения, если частицы имеют релятивистское максвелловское распределение по энергиям, а поглощение происходит на фотонах с распределением, пропорциональным виновскому, равно  $e^{-y(x+\mu_\gamma)}$ , что является аналогом соотношения Кирхгофа—Планка и следствием условия детального баланса.



**Рис. 5.** Безразмерное отношение (59) при (снизу вверх)  $y = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0$ .

На рис. 5 приведены графики логарифма коэффициента спонтанного излучения в расчете на один электрон и один позитрон (сечения), т. е. отношения

$$\frac{\varepsilon(x, y)}{n_-^0 n_+^0} = 32 \frac{r_e^2}{\lambda_C^3} \frac{\lambda_C^6}{(8\pi)^2} \left( \frac{\pi y}{K_2(y)} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W \left( \frac{y}{x} \right) = 4\pi \alpha_{fs}^2 \left( \frac{\pi y}{K_2(y)} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W \left( \frac{y}{x} \right) \quad (59)$$

в зависимости от  $x$  для ряда значений  $y$ . Рассчитывалось последнее выражение, в котором все величины представлены в релятивистской квантовой системе единиц. Это означает, что населенности частиц рассчитаны не на единичный объем, а на объем  $\lambda_C^3$ , а коэффициент излучения — не на 1 см, а на единицу длины в РКСЕ —  $\lambda_C$ , так что для перехода к размерным величинам, т. е. к предпоследнему выражению в (59), необходимо внести множитель  $\lambda_C^5 = 8.5877 \cdot 10^{-53}$ , а все графики на рис. 4 следует сдвинуть вниз на  $5 \lg \lambda_C = 52.066$ .

Из рисунка видно, что с уменьшением температуры график коэффициента излучения становится более узким, а максимум его растет. Легко вывести, что при  $y \gg 1$  и  $y \gg x$  отношение

$$\frac{\varepsilon(x, y)}{n_-^0 n_+^0} \sim 4\pi^3 \alpha_{fs}^2 \left( \frac{y}{\sqrt{\pi/(2y)}} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \sqrt{\frac{\pi y}{x}} e^{-y/x} = 8\pi^2 \alpha_{fs}^2 \sqrt{\frac{y}{x}} e^{-y(x+1/x-2)}. \quad (60)$$

Эта асимптотика в точке  $x = x_m = \sqrt{1 + \frac{1}{16y^2}} - \frac{1}{4y} \sim 1 - \frac{1}{4y}$ , сдвигающейся при увеличении  $y$  к 1 слева, имеет максимум, равный

$$8\pi^2 \alpha_{\text{fs}}^2 \sqrt{y} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{16y^2}} - \frac{1}{4y}} e^{-2y(\sqrt{1+1/(16y^2)}-1)} \sim 8\pi^2 \alpha_{\text{fs}}^2 \sqrt{y}, \quad (61)$$

т. е. растущий пропорционально  $\sqrt{y}$ .

Заметим, что функция  $\varepsilon(x, y)$  является излучательной способностью не в интенсивности, а в числах заполнения и содержит в знаменателе множитель  $x^3$ . Если на него умножить нашу функцию, графики примут более привычную форму, где максимум излучения с ростом температуры смещается в сторону больших частот. С таким исправлением графики согласуются с приведенными в [104, 90].

Выражение для коэффициента  $\varepsilon_*(x, y)$  отличается от выражения (58) для  $\varepsilon(x, y)$  только наличием под интегралом дополнительного множителя  $n(x_1)$ .

3. *Средние частоты.* В конце этого параграфа найдем средние частоты фотонов, излучаемых при аннигиляции. Усреднение ведется по распределениям импульсов аннигилирующих частиц.

Среднюю  $l$ -тую степень излучаемой частоты определим соотношением

$$\langle x^l \rangle \varepsilon_0 = \varepsilon_l = 8\pi D_e \int \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) \beta \gamma^2 x^l s_{\text{ann}}(\beta), \quad (62)$$

куда надо подставить выражение для средней степени частоты при фиксированных импульсах частиц  $\vec{z}_-$  и  $\vec{z}_+$  (34). Величина  $\varepsilon_0$  — это просто полное излучение (51). Для средней частоты ( $l = 1$ ) получается простое выражение, а именно,  $\bar{x} = s_0/2 = (\gamma_- + \gamma_+)/2$ . Для среднего квадрата находим

$$\overline{x^2} s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1}{32\beta\gamma^2} \left[ \left( 3s_0^2 - 4\gamma^2 - \frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2} \right) F_0(\beta) + \left( 3\frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2} - s_0^2 + 4\gamma^2 \right) F_2(\beta) \right]. \quad (63)$$

Здесь функции  $F_0(\beta)$  и  $F_2(\beta)$  определяются формулами (28) и (35). Ограничимся этими значениями  $l$ .

При изотропных распределениях частиц

$$\varepsilon_l = 8\pi D_e 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{z_-^2 dz_-}{\gamma_-} n_-(\gamma_-) \int_0^\infty \frac{z_+^2 dz_+}{\gamma_+} n_+(\gamma_+) \int_{-1}^1 \beta \gamma^2 x^l s_{\text{ann}}(\beta) d\zeta. \quad (64)$$

Вычислим интегралы по  $\zeta$  — косинусу угла между импульсами частиц. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \gamma_+ \gamma_- - z_+ z_- \zeta}}, \quad \beta_\pm = \beta|_{\zeta=\mp 1}. \quad (65)$$

Тогда

$$\beta_+ \beta_- = \frac{|\gamma_+ - \gamma_-|}{s_0} = \frac{|z_+^2 - z_-^2|}{s_0^2}, \quad \frac{\beta_-}{\beta_+} = \frac{|z_+ - z_-|}{z_+ + z_-}, \quad \beta_\pm = \frac{|z_+ \pm z_-|}{s_0}, \quad (66)$$

причем  $d\zeta = -(4/z_- z_+) \beta \gamma^4 d\beta$  и (64) при  $l = 0$  переписывается так:

$$\varepsilon_0 = 128\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_- n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+ n_+(\gamma_+) g_0(\beta) \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (67)$$

Формула для  $\varepsilon_1$  отличается от (67) наличием под интегралом множителя  $s_0/2$ . Для  $l = 2$  надо кроме  $g_0(\beta)$  вычислить еще 3 интеграла, так как после подстановки в (64) формулы (63) получаем (подробности опускаем)

$$\varepsilon_2 = 16\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_- n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+ n_+(\gamma_+) [s_0^2 g_1(\beta) - 2g_2(\beta) + (\gamma_- - \gamma_+)^2 g_3(\beta)] \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}. \quad (68)$$

Все функции  $g$  элементарны и неотрицательны:

$$g_0(\beta) = \beta^2 \left[ \left( \beta^2 \gamma^2 + \frac{3}{2} a(\beta) \right) a(\beta) - \gamma^2 \right], \quad (69)$$

$$g_1(\beta) = \beta^2 \left[ (2\gamma^2 - 3 + 2a(\beta)) a(\beta) - \frac{4}{3} \gamma^2 \right] + 5[a(\beta) - 1], \quad (70)$$

$$g_2(\beta) = \beta^2 \left[ \frac{17}{3} \gamma^2 + \frac{2}{3} \gamma^4 - (2\gamma^2 + 7a(\beta)) a(\beta) \right] + 10[a(\beta) - 1], \quad (71)$$

$$g_3(\beta) = 2\beta^2 [(\gamma^2 + 4a(\beta)) a(\beta) - 2\gamma^2] - 5[a(\beta) - 1] \left( 3 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{5}{3}. \quad (72)$$

Отношения  $g_l(\beta)/\beta^2$ ,  $l = 0, 1, 2$ , и  $g_3(\beta)/\beta^4$  при  $\beta \rightarrow 0$  стремятся к конечным положительным числам, равным соответственно  $1/2$ ,  $4/3$ ,  $2/3$  и  $2/7$ .

Вычисление  $\langle x \rangle$  и  $\langle x^2 \rangle$  позволяет найти дисперсию излучаемых частот и следовательно ширину аннигиляционной детали.

Если принять, что электронный и позитронный газы имеют релятивистские максвелловские распределения с одной температурой  $T = mc^2/(k_B y)$ , то после замены переменных интегрирования  $u = s_0 - 2 = \gamma_- + \gamma_+ - 2$ ,  $v = \gamma_- - \gamma_+$  интегралы  $\varepsilon_l(y)$  примут вид

$$\varepsilon_0(y) = D(y) \int_0^\infty e^{-yu} du \int_0^u dv g_0(\beta) \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (73)$$

$$\varepsilon_2(y) = \frac{D(y)}{8} \int_0^\infty e^{-yu} du \int_0^u dv [(2+u)^2 g_1(\beta) - 2g_2(\beta) + r_0^2 g_3(\beta)] \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (74)$$

где для краткости введено обозначение для коэффициента, зависящего от параметра  $y$ :

$$D(y) = 128\pi^3 D_e n_-^0 n_+^0 \left[ \frac{ye^{-y}}{4\pi K_2(y)} \right]^2. \quad (75)$$

Выражение для  $\varepsilon_1(y)$  отличается, как и выше, одним дополнительным множителем под интегралом, на этот раз  $1 + u/2$ .

Нетрудно получить асимптотики рассматриваемых интегралов при температурах, низких по сравнению с температурой  $mc^2/k_B \approx 6 \cdot 10^9$  K, т. е. при  $y \gg 1$ :

$$\varepsilon_0(y) \sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left( 1 + \frac{15}{4} \frac{1}{y} - \frac{123}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{1435}{128} \frac{1}{y^3} - \frac{70917}{2048} \frac{1}{y^4} + \frac{1002669}{8192} \frac{1}{y^5} \right), \quad (76)$$

$$\varepsilon_1(y) \sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left( 1 + \frac{21}{4} \frac{1}{y} + \frac{117}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{205}{128} \frac{1}{y^3} + \frac{9831}{8192} \frac{1}{y^5} \right), \quad (77)$$

$$\varepsilon_2(y) \sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left( 1 + \frac{29}{4y} + \frac{537}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{10303}{896} \frac{1}{y^3} + \frac{432437}{14336} \frac{1}{y^4} + \frac{5061483}{63079} \frac{1}{y^5} \right). \quad (78)$$

Из формул для  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  следуют асимптотики средней частоты и среднего квадрата частоты:

$$\langle x \rangle = \frac{\varepsilon_1(y)}{\varepsilon_0(y)} \sim 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y} + \frac{15}{8} \frac{1}{y^2} - \frac{87}{8} \frac{1}{y^3} + \frac{8295}{128} \frac{1}{y^4}, \quad (79)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon_2(y)}{\varepsilon_0(y)} \sim 1 + \frac{7}{2} \frac{1}{y} + \frac{15}{2} \frac{1}{y^2} - \frac{1611}{112} \frac{1}{y^3} + \frac{3033}{28} \frac{1}{y^4}, \quad (80)$$

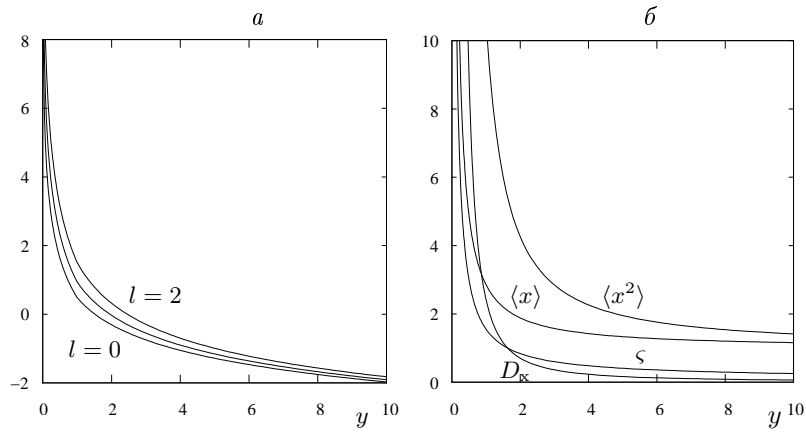
а также дисперсии и стандартного отклонения от средних частот (квадратный корень из дисперсии):

$$D_x(y) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \sim \frac{1}{2y} \left( 1 + \frac{3}{y} + \frac{195}{56} \frac{1}{y^2} + \frac{29}{14} \frac{1}{y^3} \right), \quad (81)$$

$$\varsigma(y) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \sim \sqrt{\frac{1}{2y}} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y} + \frac{69}{112} \frac{1}{y^2} + \frac{1545}{224} \frac{1}{y^3} \right). \quad (82)$$

На рис. 6а приведены логарифмы отношений  $\frac{\varepsilon_l(y)}{D(y)}$  (средняя кривая соответствует  $l = 1$ ), а на 6б средняя частота  $\langle x \rangle$  фотонов, излучаемых при аннигиляции пар, средний квадрат и дисперсия частоты, а также стандарт  $\varsigma$  в зависимости от параметра  $y$ . С ростом температуры (уменьшением параметра  $y$ ) все эти величины быстро растут. При больших значениях  $y$  расчеты и асимптотики согласуются.

4. *Замечания.* Заметим, что приведенные здесь формулы относятся к достаточно энергичным частицам, когда их можно рассматривать как свободные, т. е. не испытывающие кулоновского взаимодействия. Поправки, учитывающие это взаимодействие, в частности, возможность образования легкого атома позитрония, состоящего из электрона и позитрона, приводятся в монографиях по квантовой электродинамике, например, в [6, 2], но в большинстве случаев ими можно пренебречь. Рекомбинационное излучение позитрония значительно более слабое, чем аннигиляционное. Действительно, наибольшая энергия, которая может быть излучена после образования позитрония в его линиях, равна 6.7 эВ, а энергия фотонов, излучаемых при аннигиляции покоящейся



**Рис. 6.** Величины  $\lg[\varepsilon_l(y)/D(y)]$  ( $l = 0, 1, 2$ , *a*) и средние  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $D_x(y)$  и  $\zeta(y)$  (*б*).

пары, равна энергии покоя электрона 511.7 эВ. Если аннигилирующие частицы движутся не с релятивистскими скоростями, то, как видно из асимптотик (79)–(80), энергия испускаемых при их аннигиляции фотонов не сильно отличается от этой. Излучение, возникающее при аннигиляции позитрония, наблюдается в спектре Галактического Центра [63].

Как следует из приведенных асимптотик, аннигиляционная деталь при нерелятивистских парах получается узкой. Однако, она может быть расширена в результате рассеяния на тех же электронах и позитронах.

Здесь рассматривались двухфотонные процессы с электрон-позитронными парами. При наличии внешнего поля, например, сильного магнитного поля, возможны и однофотонные процессы, так как избыточный импульс забирает поле. Однофотонные процессы с парами возможны и в поле иона. Эти процессы являются другими каналами той же схемы, что и тормозное излучение электрона в поле иона, рассмотренное в Главе III. Соответствующие диаграммы Фейнмана можно получить из диаграммы на странице 37, если переменить направление внешней фотонной или электронной линии.

## Список литературы

- [1] Арутюнян Г. А., Джрбашян В. А., Никогосян А. Г. Энергетические потери при рассеянии фотонов свободными электронами // *Астрофизика* 1988, Т. 29, N 1, 119–131.
- [2] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. *Квантовая электродинамика*. М., Наука, 2002, 719 с.
- [3] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. *Современная электродинамика. Часть I. Микроскопическая теория*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003, 736 с.
- [4] Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М., Наука, т. I, 1973, 295 с.; т. II, 1974, 296 с.
- [5] Бекефи Дж. *Радиационные процессы в плазме*. М., Мир, 1971, 438 с.
- [6] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Курс теоретической физики, том IV. Квантовая электродинамика*. М., Физматлит, 2006, 720 с.
- [7] Бете Г., Солпитер Э. *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*. М., Физматгиз, 1960, 562 с.
- [8] Гинзбург В. Л. *Теоретическая физика и астрофизика*. М., Наука, 1987, 488 с.
- [9] Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую // *Журн. exper. теор. физ.* 1946. Т. 16. N 1. С. 15–28.
- [10] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М., Наука, 1108 с.
- [11] Евграфов М. А. *Аналитические функции*. М., Наука, 1965, 424 с.
- [12] Железняков В. В. *Излучение в астрофизической плазме*. М., Янус-К, 1997, 528 с.
- [13] Завлин В. Е., Шибанов Ю. А. Комptonизация рентгеновского излучения в плазме аккрецирующих нейтронных звезд // *Астрон. журн.* 1989. Т. 66. N 5. С. 983–995.
- [14] Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // *Успехи физ. наук.* 1975. Т. 115. N 2. С. 161–197.
- [15] Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Влияние выделения энергии на спектр излучения в горячей Вселенной // *Журн. exper. теор. физ.* 1972. Т. 62. N 4. С. 1217–1227.
- [16] Зельдович Я. Б., Левич Е. В. Бозе-конденсация и ударные волны в спектре фотонов // *Журн. exper. теор. физ.* 1968. Т. 55. N 6. С. 2423–2429.
- [17] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Строение и эволюция Вселенной*. М.: Наука, 1975, 736 с.
- [18] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М., Наука, 1966, 688 с.
- [19] Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Межгалактический газ в скоплениях галактик, микроволновое фоновое излучение и космология. *Астрофизика и космическая физика*. М.: Наука, 1982. С. 9–65.
- [20] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комpton-эффект на тепловых электронах в источниках рентгеновского излучения // *Астрон. журн.* 1972. Т. 49. N 1. С. 58–73.
- [21] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комptonизация, характерные спектры и тепловой баланс разреженной плазмы // *Астрон. журн.* 1974. Т. 51. N 4. С. 698–711.
- [22] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комptonизация, спектр реликтового излучения и тепловая история Вселенной // *Астрон. журн.* 1974. Т. 51. N 6. С. 1162–1176.
- [23] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М., Наука, 1965, 704 с.
- [24] Каплан С. А., Пикельнер С. Б. *Межзвездная среда*. М., Наука, 1963, 532 с.
- [25] Каплан С. А., Пикельнер С. Б. *Физика межзвездной среды*. М., Наука, 1979, 592 с.
- [26] Каплан С. А., Цитович В. Н. *Плазменная астрофизика*. М., Наука, 1973, 440 с.
- [27] Кардашев Н. С. О возможности обнаружения разрешенных линий атомарного водорода в радиодиапазоне // *Астрон. журн.* 1959. Т. 36. N 5. С. 838–844.
- [28] Компанец А. С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // *Журн. exper. теор. физ.* 1956. Т. 31. N 5. С. 876–885.

- [29] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том II. Теория поля. М., Физматлит, 2006, 533 с.
- [30] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том V. Статистическая физика, ч. 1. М., Физматлит, 2005, 616 с.
- [31] Левич Е. В., Сюняев Р. А. Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением // Астрон. журн. 1971. Т. 48. N 3. С. 461–470.
- [32] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М., Мир, 1980, 608 с.
- [33] Михалас Д. Звездные атмосферы. Т. 1. М., Мир, 1982, 352 с.
- [34] Нагирнер Д. И. Рассеяние пространственно однородного изотропного излучения на холодном электронном газе // Астрофизика. 1984. Т. 20. N 1. С. 149–156.
- [35] Нагирнер Д. И. Двухфотонные процессы рождения и аннигиляции электрон–позитронных пар. I. Кинематика и сечения процессов // Астрофизика. 1999. Т. 42. N 1. С. 101–118.
- [36] Нагирнер Д. И. Лекции по теории переноса излучения. СПб, Изд. СПбГУ, 2002, 284 с.
- [37] Нагирнер Д. И. Радиационные процессы в астрофизике. СПб, Изд. СПбГУ, 2007, 296 с.
- [38] Нагирнер Д. И., Кикец Е. В., Поутанен Ю. Й. Однократное комптоновское рассеяние // Уч. зап. Ленингр. ун-та. 1991. N 427. (Труды Астрон. обсерв. ЛГУ. Т. 43). С. 28–70.
- [39] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Функция Грина линейного уравнения Компанейца // Астрофизика. 1997. Т. 40. N 1. С. 97–116.
- [40] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Двухфотонные процессы рождения и аннигиляции электрон–позитронных пар. II. Кинетическое уравнение для фотонов // Астрофизика. 1999. Т. 42. N 2. С. 275–294.
- [41] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Коэффициент комптоновского ослабления при рассеянии максвелловскими электронами // Астрофизика. 2000. Т. 43. N 3. С. 473–482.
- [42] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М., Грачев С. И. Точные и численные решения уравнения Компанейца: эволюция спектра и средних частот // Астрофизика. 1997. Т. 40. N 3. С. 349–364.
- [43] Никитин А. А., Рудзикас Э. Б. Основы теории спектров атомов и ионов. М., Наука, 1983, 320 с.
- [44] Поздняков Л. А., Соболев И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. Методика расчетов методом Монте-Карло // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 21. С. 238–307.
- [45] Поздняков Л. А., Соболев И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. II // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 31. С. 267–331.
- [46] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981, 800 с.
- [47] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983, 752 с.
- [48] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964, 777 с.
- [49] Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. М., Наука, 1971, 332 с.
- [50] Соболев И. И. Введение в теорию атомных спектров. М., Наука, 1977, 319 с.
- [51] Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М., Наука, 1985, 504 с.
- [52] Соколов А. А., Гальцов Д. В., Колесникова М. М. Точный вывод формулы для синхротронного излучения // Известия высших учебных заведений. Физика. 1971. N 4. С. 14–24.
- [53] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., Наука, 1983, 304 с.
- [54] Сороченко Р. Л., Гордон М. А. Рекомбинационные радиолнии: физика и астрономия. М., Физматгиз, 2003, 391 с.
- [55] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. II. М., Физматгиз, 1963, 516 с.
- [56] Физика космоса. Маленькая энциклопедия. Ред. Р. А. Сюняев. М., Советская энциклопедия, 1986, 784 с.
- [57] Шкловский И. С. Проблема космического радиоизлучения // Астрон. журн. 30, N 1, 15–30, 1953.

- [58] Babuel-Peyrissac J.P., Rouvillois G. Radiative transfer in an LTE atmosphere: an integral kernel formulation of the Compton scatter source term // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 1970. Vol. 10. N 12. P. 1277–1290.
- [59] Barboza D.D. A note on Compton scattering // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 254. N 1. P. 301–308.
- [60] Björnsson G., Svensson R. Hot pair-dominated accretion disks // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 394. N 2. P. 500–514.
- [61] Charles Ph. Black holes in our Galaxy: observation // *Theory of Black Holes Accretion Discs* / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 1–21.
- [62] Cherry T. M. Uniform asymptotic expansions // *J. London Math. Soc.* 1949. Vol. 24. P. 121–130.
- [63] Churazov E., Sunyaev R., Sazonov S., Revnivtsev M., Varshalovich D. Positron annihilation spectrum from the Galactic Center region observed by SPI/INTEGRAL // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2003. Vol. 357. N 4. P. 1377–1386.
- [64] Dermer C. D., Sturmer S. J., Schlickeiser R. Nonthermal Compton and synchrotron processes in jets of active galactic nuclei // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1997. Vol. 109. N 1. P. 103–137.
- [65] Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // *Письма в журн. эксперим. теор. физ.* 1999. Т. 69. N 6. С. 395–401.
- [66] Frank J., King A., Raine D. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 294 p.
- [67] Ghisellini G. Pair production in steady synchrotron self-Compton models // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1989. Vol. 238. N 2. P. 449–479.
- [68] Ghisellini G. Special relativity at action in the Universe. astro-ph/9905181.
- [69] Ghisellini G., Haardt F., Svensson R. Thermalization by synchrotron absorption in compact sources: electron and photon distributions // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1998. Vol. 297. N 2. P. 348–354.
- [70] Ginzburg V. L., Syrovatskii S. I. Developments in the theory of synchrotron radiation and its reabsorption // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1969. Vol. 7. P. 375–420.
- [71] Gould R. J., Schreder G. P. Pair production in photon-photon collisions // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 155. N 5. P. 1404–1407.
- [72] Guilbert P. W. Compton heating and cooling in thermal electron gases // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1986. Vol. 218. N 1. P. 171–175.
- [73] Maciolek-Niedzwiecki A., Zdziarski A. A., Coppi P. S. Electron-positron pair production and annihilation spectral features from compact sources. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1995. Vol. 276. N 1. P. 273–282.
- [74] Madej J., Rożańska A. X-ray irradiated model stellar atmospheres. II. Comprehensive treatment of Compton scattering // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 363. P. 1055–1064.
- [75] Madejski G. M. Black holes in active galactic nuclei: observation // *Theory of Black Holes Accretion Discs* / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 22–40.
- [76] Marscher A. P., Gear W. K. Models for high-frequency radio outbursts in extragalactic sources, with application to the early 1983 millimetre-to-infrared flare of 3C 273 // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 298. N 1. P. 114–127.
- [77] Menzel D. Physical processes in gaseous nebulae. I. Absorption and emission of radiation // *Astrophys. J.* 1937. V. 85. N 4. P. 330–339. (Русский перевод: Д. Мензел. Поглощение и излучение света в условиях газовых туманностей. С. 9 в сб. “Физические процессы в газовых туманностях”, под ред. Д. Мензела и др. ИЛ. 1948.)
- [78] Mirabel I. F., Rodríguez L. F. Sources of relativistic jets in the Galaxy // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1999. Vol. 37. P. 409–443.
- [79] Molnar S. M., Birkinshaw M. Inverse Compton scattering in mildly relativistic plasma // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 523. N 1. P. 78–86.
- [80] Moskalenko I. V., Strong A. W. Anisotropic inverse Compton scattering in the Galaxy // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 528. N 1. P. 357–367.
- [81] Nagirner D. I., Poutanen J. Single Compton scattering // *Astrophys. Space Phys. Rev.* 1994. Vol. 9. P. 1–80.
- [82] Peterson B. M. *An Introduction to Active Galactic Nuclei*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 238 p.
- [83] Poutanen J. Accretion disc-corona models and X/γ-ray spectra of accreting black holes // *Theory of Black Holes Accretion Discs* / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. P. 100–122.

- [84] Poutanen J., Svensson R. The two-phase pair corona model for active galactic nuclei and X-ray binaries: how to obtain exact solutions // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 470. N 1. P. 249–268.
- [85] Puy D., Grenacher L., Jetzer Ph., Signore M. Asphericity of galactic clusters and Sunyaev–Zel’dovich effect // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 363. 415–424.
- [86] Rephaeli Y. Comptonization of the cosmic microwave background: the Sunyaev–Zeldovich effect // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1995. Vol. 33. P. 541–579.
- [87] Rybicki G. B., Lightman A. P. Radiative processes in astrophysics. Wiley-Interscience. John Wiley & Sons. N. Y. 1979. 382 p.
- [88] Shestakov A. I., Kershaw D. S., Prasad M. K. Evaluation of integral of Compton scattering cross-section // *J. Quant. Spectrosc. Rad. Trans.* 1988. Vol. 40. 577–589.
- [89] Sunyaev R. A., Titarchuk L. G. Comptonization of X-rays in plasma clouds. Typical radiation spectra // *Astron. Astrophys.* 1980. Vol. 86. N 1-2. P. 121–138.
- [90] Svensson R. The pair annihilation process in relativistic plasmas // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 258. N 1-2. P. 321–334.
- [91] Svensson R. Electron-positron pair equilibria in relativistic plasmas // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 258. N 1. P. 335–348.
- [92] Svensson R. The thermal pair annihilation spectrum: a detailed balance approach // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 270. N 1. P. 300–304.
- [93] Svensson R. Steady mildly relativistic thermal plasmas: processes and properties // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol. 209. N 1. P. 175–208.
- [94] Svensson R. Non-thermal pair production in compact X-ray sources: first order Compton cascades in soft radiation fields // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1987. Vol. 227. N 2. P. 403–451.
- [95] Svensson R. The nonthermal pair model for the X-ray and gamma-ray spectra from active galactic nuclei // *Astrophys. J. Suppl.* 1994. Vol. 92. N 2. P. 585–592.
- [96] Svensson R. Thermalization mechanisms in compact sources // *High Energy Processes in Accreting Black Holes* / Eds. J. Poutanen and R. Svensson. Astronomical Society of the Pacific. Conference Series. 1999. Vol. 161. P. 361–374.
- [97] Takahara F., Kusunose M. Electron-positron pairs in a mildly relativistic plasma in active galactic nuclei // *Astrophys. Space Sci.* 1986. Vol. 119. N 1. P. 217–219.
- [98] Terrell J. Invisibility of the Lorentz-contraction // *Phys. Rev.* 1959. Vol. 116. N 4. P. 1041–1045.
- [99] Tritz B. G., Tsuruta S. Effects of electron-positron pairs on accretion flows // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 340. N 1. P. 203–215.
- [100] Wardziński G., Zdziarski A. Thermal synchrotron radiation and its comptonization in compact X-ray sources // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2000. Vol. 314. N 1. P. 183–198.
- [101] Westfold K. C. The polarization of synchrotron radiation // *Astrophys. J.* 1959. Vol. 130. N 1. P. 241–258.
- [102] Weymann R. The energy spectrum of radiation in the expanding universe // *Astrophys. J.* 1966. Vol. 145. N 2. P. 560–571.
- [103] Xue Y.-J., Wu X.-P. Reconstruction of radial temperature profile of galaxy clusters // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 360. L43–L46.
- [104] Zdziarski A. A. Annihilation spectrum of relativistic plasma // *Acta Astronomica.* 1980. Vol. 30. N 4. P. 371–391.
- [105] Zel’dovich Ya. B., Sunyaev R. A. The interaction of matter and radiation in a hot-model universe // *Astrophys. Space Sci.* 1969. Vol. 4. P. 301–316. (Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Взаимодействие вещества и излучения в горячей модели Вселенной // *Astrophys. Space Sci.* 1969. Vol. 4. P. 285–300.)



# Содержание

<b>Введение</b> .....	1
<b>Г л а в а I. Основы теории относительности</b> .....	2
§ 1. Основные положения .....	2
§ 2. Простейшие эффекты .....	3
§ 3. Скаляры и векторы .....	5
§ 4. Скорость, импульс, ускорение .....	8
§ 5. Импульс и энергия фотона .....	11
§ 6. Проявления эффектов относительности .....	15
<b>Г л а в а II. Классическая теория излучения</b> .....	20
§ 1. Уравнения Максвелла и их следствия .....	20
§ 2. Излучение точечного заряда .....	22
§ 3. Излучение медленных и быстрых зарядов .....	28
§ 4. Термодинамическое равновесие .....	31
<b>Г л а в а III. Тормозной и рекомбинационный механизмы</b> .....	33
§ 1. Тормозной механизм (нерелятивистская теория) .....	33
§ 2. Релятивистское тормозное излучение .....	36
§ 3. Рекомбинационный механизм .....	40
<b>Г л а в а IV. Магнито-тормозной механизм</b> .....	46
§ 1. Геометрия и терминология .....	46
§ 2. Угловая зависимость излучения одиночного заряда в волновой зоне .....	50
§ 3. Спектр магнито-тормозного излучения в волновой зоне .....	54
§ 4. Спектр синхротронного излучения .....	61
<b>Г л а в а V. Черенковское и переходное излучение</b> .....	71
§ 1. Движение заряда в диэлектрике и его раблюдение .....	71
§ 2. Потенциалы заряда в диэлектрике .....	75
§ 3. Излучение Черенкова и его спектр .....	76
§ 4. Переходное излучение .....	78
<b>Г л а в а VI. Комптоновское рассеяние</b> .....	81
§ 1. Описание комптоновского рассеяния .....	81
§ 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи .....	84
§ 3. Решения кинетических уравнений .....	87
§ 4. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния .....	93
<b>Г л а в а VII. Двухфотонные рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар</b> .....	96
§ 1. Описание процессов .....	96
§ 2. Кинетическое уравнение для фотонов при процессах с парами .....	100
§ 3. Усреднение коэффициентов .....	102
<b>Список литературы</b> .....	108