Лекция 4.
Мультиагентное управление

Лаборатория Системного ПРограммирования и ИНформационных Технологий СПбГУ

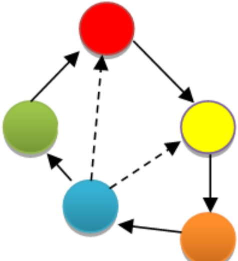
Основные сведения из теории графов

- Сопоставим каждой дуге $(j,i) \in E$ вес $a^{i,j} > 0$ и определим **матрицу смежности (или связности)** $A = [a^{i,j}]$ графа $\mathscr{G}_A = (N,E)$.
- Определим **взвешенную полустепень захода вершины** i как сумму i-й строки матрицы A: $d^i = \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$;
- $d_{\max}(A)$ — максимальная полустепень захода графа $\mathscr{G}_A$;
- $D(A) = \mathrm{diag}\{d^i(A)\}$;
- $\mathscr{L}(A) = D(A) - A$ — **лапласиан** графа.
- **Направленный путь** из узла i_1 в узел i_s состоит из последовательности узлов $i_1, \dots, i_s$, $s \geq 2$ таких, что $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.
- Граф называется **связным**, если для всех пар различных узлов (i,j) есть направленный путь из i в j.
- Связный граф, в котором число дуг на одну меньше числа вершин, называется **деревом**. Дерево, являющееся частичным графом связного графа, называется **остовным деревом**.

Топология динамической сети

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из набора динамических подсистем (агентов) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ с входами u_t^i, выходами $y_t^{i,i}$ и состояниями x_t^i, взаимодействующих в соответствии с ориентированным графом (N, E), где E — множество дуг.

- **Множеством соседей** узла i называется $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$.
- Структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$, где $E_t \subseteq E$ меняется во времени.



Динамика состояний узлов

Каждому агенту $i \in N$ (узлу графа) в момент времени $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ сопоставляется изменяющееся во времени состояние $x_t^i \in \mathbb{R}$, динамика которого описывается разностным уравнением:

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \tag{1}$$

с управлением $u_t^i \in \mathbb{R}$, воздействие которого на изменение состояния x_t^i определяется некоторой функцией $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящей от текущего состояния агента x_t^i и задаваемого управления u_t^i.

Наблюдения

Для формирования управления каждый узел $i \in N$ имеет информацию о своем собственном состоянии:

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \tag{2}$$

и, если $N_t^i \neq \emptyset$, наблюдения о состояниях соседей:

$$y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j},\ j \in N_t^i, \tag{3}$$

где $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$ — помехи (шум), а $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ — целочисленная задержка, $\bar{d}$ — максимально возможная задержка.
Положим $w_t^{i,j} = 0$ и $d_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар (i,j), для которых они не были определены. Так как система начинает работу при $t = 0$, неявное требование к множеству соседей: $j \in N_t^i \Rightarrow t - d_t^{i,j} \geq 0$.

Задача консенсуса на графах

- Узлы i и j называются **согласованными** в сети в момент времени t тогда и только тогда, когда $x_t^i = x_t^j$. **Задача о достижении консенсуса в момент времени** t — это согласование всех узлов между собой в момент времени t.
- n узлов достигают ε**-консенсуса** в момент времени t, если существует случайная величина $x^\star$ такая, что $|x_t^i - x^\star|^2 \leq \varepsilon$ для всех $i \in N$.
- n узлов достигают **среднеквадратичного** ε**-консенсуса** в момент времени t, если $\mathrm{E}||x_t^i||^2 < \infty$, $i \in N$ и существует случайная величина $x^\star$ такая, что $\mathrm{E}||x_t^i - x^\star||^2 \leq \varepsilon$ для всех $i \in N$.
- n узлов достигают **асимптотического среднеквадратичного консенсуса**, если $\mathrm{E}||x_t^i||^2 < \infty$, $i \in N$ и существует случайная величина $x^\star$ такая, что $\overline{\lim}_{t\to\infty} \mathrm{E}||x_t^i - x^\star||^2 = 0$ для всех $i \in N$.

Цель работы

Цель работы — исследование свойств консенсусного мультиагентного управления, формируемого по, так называемому “**протоколу локального голосования**”:

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i}), \tag{4}$$

где $\alpha_t > 0$ — размеры шагов протокола управления, $b_t^{i,j} > 0$, $\forall j \in \bar{N}_t^i$. Положим $b_t^{i,j} = 0$ для всех остальных пар i, j.

Основные предположения

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ — основное вероятностное пространство.

Предположения

а) $\forall i \in N, j \in N_t^i \cup \{i\}$ помехи наблюдений $w_t^{i,j}$ — центрированные, независимые, одинаково распределенные случайные величины с ограниченными дисперсиями: $E(w_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$.
б) $\forall i \in N, j \in N^i$ появление переменных дуг (j,i) в графе $\mathscr{G}_{A_t}$ — независимые, случайные события, вероятность которых $p_a^{i,j}$.
в) $\forall i \in N, j \in \bar{N}_t^i$ веса $b_t^{i,j}$ в протоколе управления — ограниченные случайные величины: $\underline{b} \leq b_t^{i,j} \leq \bar{b}$ с вероятностью 1, и существуют пределы $b^{i,j} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E} b_t^{i,j}$.
г) $\forall i,j \in N$ существует конечная величина $\bar{d} \in \mathbb{N}$: $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$ с вероятностью 1 и целочисленные задержки $d_t^{i,j}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $k = 0, \ldots, \bar{d}$ с вероятностями $p_k^{i,j}$.
Кроме того, все перечисленные случайные величины и матрицы независимы между собой.

Усредненная детерминированная модель

Обозначим $\bar{n} = n(\bar{d}+1)$ и определим матрицу $A_{\max}$ размерности $\bar{n} \times \bar{n}$:

$$a^{i,j}_{\max} = p^{i,((j-1) \bmod n)+1}_{j \div n} \, p^{i,((j-1) \bmod n)+1}_{a} \, b^{i,((j-1) \bmod n)+1}, \; i \in N, \; j = 1, 2, \ldots,$$

$$a^{i,j}_{\max} = 0, \; i = n+1, n+2, \ldots, \bar{n}, \; j = 1, 2, \ldots, \bar{n}.$$

Обозначим $E_{\max} = \{(j,i) : \sup_{t \geq 0} a^{i,j}_t > 0\}$ — максимально множество каналов связи.

Рассмотрим соответствующую (??) усредненную дискретную модель

$$\bar{Z}_{t+1} = U\bar{Z}_t + G(\alpha_t, \bar{Z}_t), \; \bar{Z}_0 = \bar{X}_0, \tag{5}$$

где

$$G(\alpha, \bar{Z}) = G\left(\alpha, \begin{array}{c} z^1 \\ \vdots \\ z^{n(\bar{d}+1)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \cdots \\ f^i(z^i, \alpha s^i(\bar{Z})) \\ \cdots \\ 0_{n\bar{d}} \end{array}\right), \tag{6}$$

$$s^i(\bar{Z}) = \sum p^{i,j}_a b^{i,j}((\sum^{\bar{d}} p^{i,j}_k z^{j+kn}) - z^i) = -d^i(A_{\max}) z^i + \sum^{n(\bar{d}+1)} a^{i,j}_{\max} z^j, i$$

Теорема 1. Консенсус

Теорема 1

- Выполнены условия **а - г**
- $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha}$
- $\forall i \in N$ функции $f^i(x, u)$ — липшицевы
- В усредненной дискретной системе (5) в момент времени T достигается $\frac{\varepsilon}{4}$-консенсус
- Справедлива следующая оценка:

$$c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2} \bar{\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда в стохастической дискретной системе достигается среднеквадратичный ε-консенсус в момент времени T.

Теорема 2. Консенсус (линейный случай): $f^i(x,u) = u \; \forall i \in N$

Теорема 2

- Выполнены условия **а - г**
- $\alpha_t = \alpha > 0$ и $\alpha < \frac{1}{d_{\max}}$
- $f^i(x,u) = u$ для любого $i \in N$
- Граф $\{N, E_{\max}\}$ имеет остовное дерево

тогда в усредненной дискретной системе n узлов достигают асимптотического среднеквадратичного консенсуса.

Балансировка загрузки узлов сети

- Рассмотрим модель децентрализованной системы распределения заданий между n агентами (узлами), выполняющими параллельно однотипные задания, в которой допускается перераспределение заданий между агентами.
- Каждый агент $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ выполняет поступающие задания по принципу очереди.
- Задания поступают в систему в различные дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ на разные узлы. Связь между узлами определяется, как и ранее, структурой связей динамической сети.

Математическая модель

В момент времени t поведение каждого агента $i \in N$ описывается двумя характеристиками:

- $q_t^i \geq 0$ — длина очереди из атомарных элементарных заданий узла i в момент времени t;
- $r_t^i > 0$ — производительность узла i в момент времени t.

Динамика изменения длины очереди

Для каждого агента $i \in N$ динамика изменений длины очереди описывается следующими уравнениями:

$$q_{t+1}^i = q_t^i - r_t^i + z_t^i + u_t^i; \;\; i \in N, \; t = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

где $u_t^i \in \mathbb{R}$ — управляющие воздействия, которые в момент времени t воздействуют на узел i, z_t^i — размер нового задания, поступившего на узел i в момент времени t.

Цель управления

- Для момента времени t определим T_t – время до окончания выполнения всех заданий на всех узлах.

Рассмотрим стационарный случай, в котором не предполагается перераспределение заданий между агентами. Тогда время реализации всех заданий в момент времени t определяется как:

$$T_t = \max_{i \in N} \frac{q_t^i}{r_t^i}. \tag{8}$$

Цель управления

$$T_t \to \min_{u_t^i}. \tag{9}$$

Оптимальная стратегия управления

Стационарный случай

Все задания поступают в систему на разные узлы в начальный момент времени и производительности узлов не меняются с течением времени.

Нестационарный случай

Новые задания могут поступать в систему на любой из n узлов в различные моменты времени t и производительности узлов могут меняются с течением времени.

В стационарном случае лучшая стратегия для распределения заданий соответствует тому варианту, при котором

$$q_s^i/r_s^i = q_s^j/r_s^j, \forall i, j \in N, \forall s \leq t. \tag{10}$$

Таким образом, если взять $x_t^i = q_t^i/r_t^i$ в качестве состояния узла i, то цель управления будет соответствовать достижению консенсуса.

Теорема 3. Условия ε-оптимальной загрузки

Теорема 3

- Выполнены условия **а - г**
- Граф $\{N, E_{\max}\}$ имеет остовное дерево
- $\alpha_t = \alpha > 0$ — достаточно мало: $\alpha < \frac{1}{d_{\max}}$
- Данные о производительности узлов с течением времени стабилизируются: $\mathrm{E} r_t^i = \bar{r}^i, \forall\, i \in N$

тогда в стохастической дискретной системе n узлов достигают среднеквадратичного ε-консенсуса в моменты времени $t: \ \bar{T} \leq t \leq T$.

Благодарю за внимание!
Вопросы?