

Лекция 6: Излучение частиц и рассеяние волн в плазме

Кочаровский Вл.В.

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

4-ая Школа современной астрофизики, Пущино, 7-18 июля 2008г.

Магнитотормозное излучение

$$\hbar\omega = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \theta}{1 - n_j^2 \cos^2 \theta} \left[1 \pm \sqrt{1 - 2s\hbar\omega_B \frac{1-\beta^2}{m_e c^2} \frac{1 - n_j^2 \cos^2 \theta}{(1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \theta)^2}} \right],$$

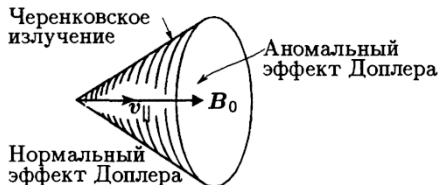
$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\omega \approx \omega_s = \frac{s\omega_B \sqrt{1-\beta^2}}{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \theta} + \left(\frac{s\omega_B \sqrt{1-\beta^2}}{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \theta} \right)^2 \frac{\sqrt{1-\beta^2} (1 - n_j^2 \cos^2 \theta)}{2m_e c^2 (1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \theta)}.$$

Спектральная мощность магнитотормозного излучения (при $n_j = 1$):

$$P_{\omega\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_s^2(s\beta \sin \theta) + \beta_{\perp}^2 J_s'^2(s\beta \sin \theta) \right] \delta(\omega - \omega_s).$$

Нормальный и аномальный эффект Доплера



Области аномального $n_j \beta_{\parallel} \cos \theta > 1$ и нормального $n_j \beta_{\parallel} \cos \theta < 1$ эффектов Доплера при магнитотормозном излучении электрона в среде. Коническая поверхность соответствует черенковскому излучению $n_j \beta_{\parallel} \cos \theta = 1$.

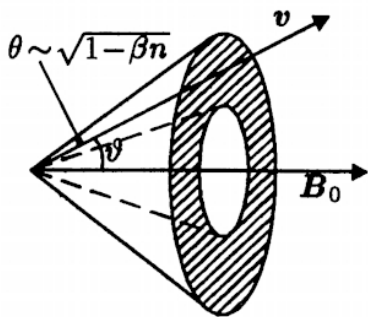
Условие излучения Вавилова-Черенкова:

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad \text{или} \quad v_{ph} = v \cos \theta, \quad v_{ph} = c/n_j.$$

Спектральная мощность черенковского излучения электроном плазменных волн равна:

$$P_{\omega\Omega} = \frac{e^2 \omega k}{2\pi \epsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad v_T < v_{ph} < v.$$

Ширина диаграммы синхротронного излучения



Если $n > 1$, то $\cos \theta \lesssim \frac{1}{\beta n}$.

Если $n < 1$ и $1 - n^2 \gg 1/\gamma^2$, то

$$\Delta \theta \sim \sqrt{1 - \beta n}.$$

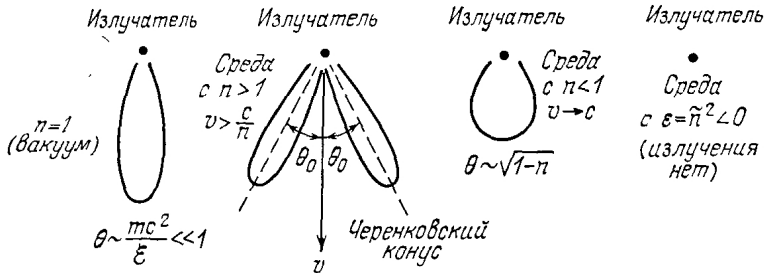
Если $n < 1$ и $1 - n^2 \ll 1/\gamma^2$, то

$$\Delta \theta \sim \frac{1}{\gamma}.$$

Депрессия синхротронного излучения в плазме.

Если $\frac{\omega_L^2}{\omega_{B\perp}^2} \gg \gamma^2$, то $\omega'_{max} \approx \sqrt{2}\gamma\omega_L \gg \omega_{max} \sim \frac{\gamma^2\omega_{B\perp}}{2}$.

Синхротронное излучение. Диаграммы направленности



Схематическое изображение полярных диаграмм для излучателей в вакууме и в среде.

Синхротронная реабсорбция

Коэффициент реабсорбции синхротронного излучения:

$$\mu_j = -\frac{8\pi^3 c}{n_j \omega^2} |\cos \theta_j| \int_0^\infty P_j(\omega, \mathcal{E}) \frac{d}{d\mathcal{E}} \left[\frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} \right] \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}.$$

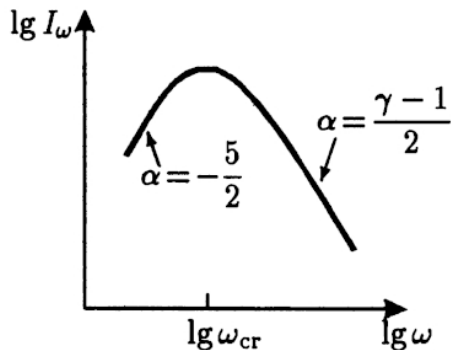
В разреженной плазме $v \ll 1$ со слабым магнитным полем $\omega_B \ll \omega$:

$$n_j^2 = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \rightarrow n_j \approx 1, \quad \cos \theta_j \approx 1.$$

$$P_j = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega}{c} \left[\left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \right] \left[\int_{\omega/\omega'_c}^\infty K_{5/3}(x) dx + \frac{1 - K_j^2}{1 + K_j^2} K_{2/3}(\omega/\omega'_c) \right]$$

$$\omega'_c = \frac{3}{2} \omega_B \sin \theta \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \left[1 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Синхротронная реабсорбция



Частотный спектр синхротронного излучения системы релятивистских электронов со степенным энергетическим спектром (при учете реабсорбции и в пренебрежении влияния среды).

Для степенного распределения $N(\mathcal{E}) = K\mathcal{E}^{-\gamma}$:

$$\mu_j = g(\gamma) \frac{e^3}{m_e} \left(\frac{3e}{m_e^3 c^5} \right)^{\gamma/2} K (B_0 \sin \theta)^{(\gamma+2)/2} \omega^{-(\gamma+4)/2},$$

$$g(\gamma) = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \Gamma \left(\frac{3\gamma + 2}{12} \right) \Gamma \left(\frac{3\gamma + 22}{12} \right).$$

Синхротронная неустойчивость

При условиях

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \gg 1, \quad \mathcal{E} > 2 m_e c^2 \omega^2 \omega_B \omega_L^{-3} \sin \theta$$

реабсорбция становится отрицательной и синхротронное излучение будет усиливаться в самой системе излучающих электронов. Для системы со степенным распределением вида

$$N(\mathcal{E}) = K \mathcal{E}^{-\gamma}, \quad \text{если } \mathcal{E}_1 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_2,$$

$$N(\mathcal{E}) = 0, \quad \text{если } \mathcal{E} < \mathcal{E}_1 \text{ или } \mathcal{E} > \mathcal{E}_2$$

степень реабсорбции будет отрицательной, если индекс $\gamma < -2$.

Замечания о синхротронной неустойчивости

- Изотропия распределения по импульсам не обязательна, достаточно, чтобы $f(p)$ мало менялась на интервале питч-углов

$$\Delta\theta \sim \sqrt{\left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + 1 - n^2}.$$

- Если распределение релятивистских электронов сильно анизотропное, то синхротронная неустойчивость возможна и при отсутствии "холодной" плазмы. Роль среды могут играть сами излучающие электроны. Условие такой неустойчивости

$$\left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \ll \left(\frac{B_0 \sin^2 \theta}{\mathcal{E}_0 N_S}\right)^{1/2} \ll 1.$$

- Речь шла о неустойчивости в системах с показателем преломления $n < 1$, $1 - n \ll 1$.

Выход излучения из плазмы. Интенсивность

Уравнение переноса:

$$\frac{dl}{dl} = a_\omega - \mu_j l_\omega.$$

Решение в слое с однородным распределением a_ω и μ

$$I_\omega(l) = I_\omega(l_0) \exp(-\mu_j(l - l_0)) + \frac{a_\omega}{\mu_j} (1 - \exp(-\mu_j(l - l_0))).$$

Решение в неоднородной среде

$$I_\omega(l) = I_\omega(l_0) \exp(-\tau_j) + \int_0^{\tau_j} \frac{a_\omega}{\mu_j} \exp(\xi - \tau_j) d\xi, \quad \tau_j = \int_{l_0}^l \mu_j(l') dl'.$$

Выход излучения из плазмы. Яркостная температура

Интенсивность равновесного излучения

$$I_{\omega}^0 = \frac{n^2 \omega^2 k T}{(2\pi)^3 c^2 |\cos \theta|}.$$

Введем яркостную температуру T_b :

$$I(\omega, \mathbf{s}) = \frac{n^2 \omega^2 k T_b(\omega, \mathbf{s})}{(2\pi)^3 c^2 |\cos \theta|}, \quad \mathbf{s} \text{ — направление фазовой скорости.}$$

Уравнение переноса

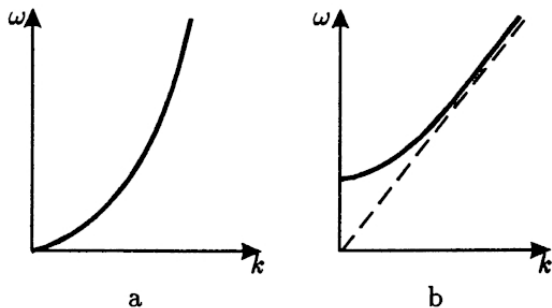
$$\frac{dT}{d\tau_j} = T - T_b,$$

и его решение

$$T_b(l) = e^{-\tau_j} \int_0^{\tau_j} T(\xi) e^{\xi} d\xi + e^{-\tau_j} T_b(l_0), \quad \xi(l) = \int_{l_0}^l \mu_j dl.$$

$$\text{если } \tau_j \ll 1 \Rightarrow T_b \approx T \tau_j + T_b(l_0)(1 - \tau_j).$$

Нелинейное взаимодействие волн



- $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega$,
- $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k}$.

Пример распадного(слева) и нераспадного (справа) спектров.

Критерий распадности:

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Для нераспадного спектра запрещены процессы: $t + t \leftrightarrow t$, $l + l \leftrightarrow l$

Разрешены трехволновые взаимодействия: $l + t \leftrightarrow t$, $l + l \leftrightarrow t$.

Комбинационное рассеяние

- Рассеяние на встречных плазменных волнах с близкими значениями фазовой скорости

$$v_{ph} \ll \frac{c}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2 \Rightarrow$$

Возникает ЭМ излучение на удвоенной плазменной частоте.

- Плазменные волны с высокими фазовыми скоростями

$$v_{ph} > \frac{c}{\sqrt{3}}$$

не могут конвертироваться в ЭМ, т.к. не в состоянии удовлетворить ЗСИ.

Кинетическое уравнение для фотонов

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= \int w(N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} - N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}}) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}, \\ \frac{\partial N_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} &= \int w(N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2}) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}, \\ \frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}}{\partial t} &= \int w(N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2}) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}.\end{aligned}$$

Учитывая $N_{\mathbf{k}} = 8\pi^3 W_{\mathbf{k}} / (\hbar\omega)$, можно записать первое уравнение в виде уравнения переноса

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial l} = \int \omega w \left(\frac{W_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}_2}}{\omega_1 \omega_2} - \frac{W_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}}}{\omega_1 \omega} - \frac{W_{\mathbf{k}_2} W_{\mathbf{k}}}{\omega_2 \omega} \right) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{\hbar(2\pi)^3}.$$

Слияния и распады в изотропной плазме

Уравнения переноса можно привести к виду:

$$\frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial l_\omega}{\partial t} + \frac{n_j^2}{|\cos \theta_j|} \frac{d}{dl} \left(\frac{l_\omega |\cos \theta|}{n_j^2} \right) = a_\omega - \mu_j l_\omega.$$

Вероятность рассеяния $l + l \leftrightarrow t$ в изотропной плазме:

$$w = 2\pi^5 \frac{\hbar e^2}{m_e^2 \omega_L} \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{k^2} \frac{[\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2]}{k_1^2 k_2^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2),$$

тогда

$$\alpha_\omega = \frac{2(2\pi)^3}{5\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^4 k}{m_e^2 c^5 c^2 v_T^2 v_{ph}} W_{\mathbf{k}_1}^2,$$

$$\mu = \frac{2(2\pi)^3}{15\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^2}{m_e^2 c^3 v_T^2 v_{ph}} W_{\mathbf{k}_1}.$$

Плазменный процесс генерации радиоволн может быть эффективен в короне Солнца и магнитосферах пульсаров.

Аннигиляционно-циклотронный резонанс

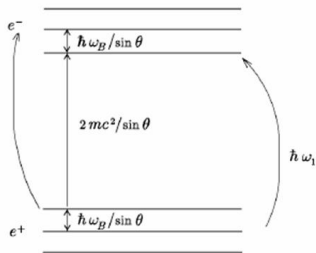


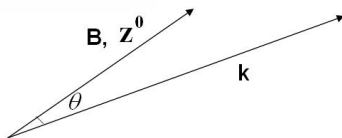
Рис. 1. Основной аннигиляционный и первый аннигиляционно-циклотронный резонансные переходы между уровнями Ландау электронов (e^-) и позитронов (e^+)

$$B_{cr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \approx 4.4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$$

$$mc^2 = \hbar \omega_B = \frac{\hbar e B}{mc}, \quad m \text{ и } e - \text{ масса и заряд электрона,}$$

c – скорость света в вакууме

$$\hbar \omega_0 = 2mc^2 / \sin \theta$$



$$\varepsilon_{ij}(\omega, k) = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij} \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\chi_{zz}(\omega, k) \equiv \frac{c \Pi_{zz}}{\omega^2} = \frac{\sqrt{2} m_0^5 c^9 b}{\pi^2 \hbar^4 \omega^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2) \beta} \left\{ - \frac{4\pi i \hbar \omega^3 [\eta(p_F - p_1) + \eta(p_F - p_2) - 1]}{m_0 c^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2)} - \frac{4\hbar k_z \beta}{m^3 c^4} (\mu_+ - \mu_-) + \sum_{g=1}^2 \frac{(-1)^g \phi_g \mathcal{L}_g}{\sqrt{1 + (p_g/m_0 c)^2}} \right\} \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\alpha}{8\sqrt{2}} \frac{B}{B_c} \exp \left[-\frac{2B_c}{B} \left(\frac{\hbar k \sin \theta}{2m_0 c} \right)^2 \right] \\
\phi_{1,2} &= \left(\frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} \right)^2 + \frac{\hbar k_z (\hbar k_z \pm 2\beta) \omega^2}{m_0^2 c^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2)} \\
\mathcal{L}_{\pm} &= \log \left[\frac{(p_F + p_{\pm}) (\hbar k_z - p_F - p_{\pm}) [m_0^2 c^2 + p_F p_{\pm} + \mu (m_0^2 + p_{\pm}^2 / c^2)^{1/2}]}{(p_F - p_{\pm}) (\hbar k_z + p_F - p_{\pm}) [m_0^2 c^2 - p_F p_{\pm} + \mu (m_0^2 + p_{\pm}^2 / c^2)^{1/2}]} \right] \\
&\quad + \log \left[\frac{[m_0^2 c^2 + (\hbar k_z + p_F) p_{\pm} + \mu_+ (m_0^2 + p_{\pm}^2 / c^2)^{1/2}] [(m_0^2 c^2 + p_{\pm}^2)^{1/2} - p_{\pm}]}{[m_0^2 c^2 + (\hbar k_z - p_F) p_{\pm} + \mu_- (m_0^2 + p_{\pm}^2 / c^2)^{1/2}] [(m_0^2 c^2 + p_{\pm}^2)^{1/2} + p_{\pm}]} \right] \\
\mu &= (m_0^2 c^4 + p_F^2 c^2)^{1/2} \quad \mu_{\pm} = [m_0^2 c^4 + (\hbar k_z \pm p_F)^2 c^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь $p_{1,2}$ - импульс электрона и позитрона, аннигилирующих в фотон с частотой ω и продольным волновым числом $k_z = k \cos \theta$. Согласно законам сохранения энергии импульса

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \hbar k_z \pm \beta \quad \beta = \frac{\hbar \omega}{2c} \left[1 - \frac{4m_0^2 c^4}{\hbar^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2)} \right]^{1/2}.$$

Аннигиляционный резонанс $\chi_{zz} \rightarrow \infty$

The extraordinary wave is polarized elliptically in the k, B plane (figure 9(b)).
Solution of its dispersion equation

$$\omega^2 = c^2 k^2 - 4\pi \chi_{zz}(\omega, k) (\omega^2 - c^2 k_z^2) \tag{3.13}$$

shows that in a degenerate e^-e^+ plasma the extraordinary wave is unstable

Рассмотрим подробнее дисперсию и декременты плоских необыкновенной (\parallel) и обыкновенной (\perp) волн, поле которых пропорционально $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$, с действительным волновым вектором \mathbf{k} вблизи первого аннигиляционно-циклотронного резонанса, формально (кинематически) отвечающего частоте

$$\omega_1 = mc^2 [1 + (1 + 2B/B_c)^{1/2}] / (\hbar \sin \theta) \simeq \omega_0 + \omega_B / \sin \theta \quad (2)$$

и волновому числу $k_1 = \omega_1/c$. Во второй части формулы (2) мы использовали неравенство $B \ll B_c$, поскольку, как будет ясно из дальнейшего, только этот случай и представляет интерес для целей, указанных во введении. Нормируем магнитное поле на критическое значение, $b = B/B_c$, волновой вектор — на комптоновское значение, $\kappa = \hbar k / (mc) \equiv k \lambda_c$, и введём следующие обозначения, имея в виду область частот $|\omega - \omega_{0,1}| \ll \omega_{0,1}$:

$$R_0 = \sin^2 \theta (k - k_0) / k_0, \quad R_{1\parallel} = R_{1\perp} = \sin^2 \theta (k - k_1) / k_1, \quad (3)$$

$$Q_0 = \frac{\alpha b \sin^3 \theta}{8 \sqrt{2}} \exp \left[-\frac{2}{b} \left(\frac{\kappa \sin \theta}{2} \right)^2 \right], \quad Q_{1\parallel} = \frac{4Q_0}{b(1+2b)^{1/4}}, \quad Q_{1\perp} = \frac{8Q_0}{(1+2b)^{1/4} (1 + \sqrt{1+2b})^2}, \quad (4)$$

где $\alpha = e^2 / (\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Тогда действительные ω' и мнимые ω'' части частот волн вблизи основного аннигиляционного и первого аннигиляционно-циклотронного резонансов находятся из одного и того же приведённого кубического уравнения с соответствующими коэффициентами R и Q [17, 18]. Внутри резонансной области $|k - k_{0,1}| / k_{0,1} \lesssim Q_{0,1}^{2/3} / \sin^2 \theta \ll 1$ приближённо имеем ¹

$$\omega'(k) \simeq \omega_{0,1} \sin^2 \theta + ck \left[\cos^2 \theta + \frac{Q_{0,1}^{2/3}}{2} \left(1 + \frac{4R_{0,1}}{3Q_{0,1}^{2/3}} \right) \right], \quad (5)$$

$$\omega''(k) \simeq \omega_{0,1} \frac{\sqrt{3} Q_{0,1}^{2/3}}{2} \left[1 - \left(\frac{R_{0,1}}{3Q_{0,1}^{2/3}} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Вне указанной резонансной области, т. е. при $(k - k_{0,1})/k_{0,1} \gg Q_{0,1}^{2/3}/\sin^2 \theta$, приходим к стандартному балансному приближению для коэффициента пространственного затухания интенсивности плоских волн:

$$\sigma_{0,1} \equiv 2\omega''/c \simeq 2k_{0,1}Q_{0,1}/\sqrt{R_{0,1}}.$$

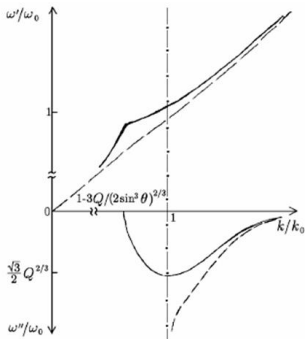


Рис. 2. Дисперсия необыкновенной волны $\omega(k) = \omega' + i\omega''$ вблизи порога однофотонного поглощения $k_0 = 2mc/(\hbar \sin \theta)$; параметр $Q = \alpha B \sin^3 \theta / (8\sqrt{2} B_c) \exp(-2B_c/B)$. Пунктиром показано известное балансное приближение, заведомо нарушающееся при $c(k - k_0) \lesssim 2 \max[\omega''(k)]/\sin \theta$

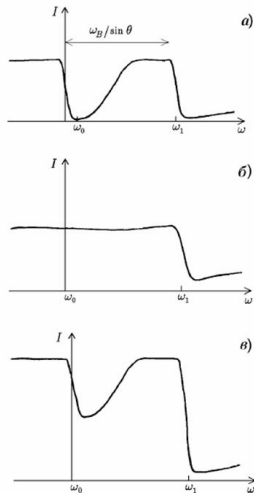
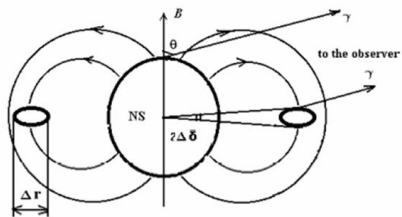
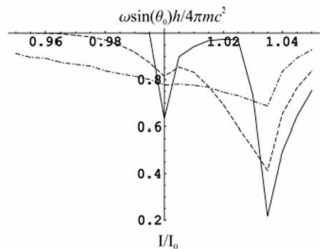


Рис. 3. Качественный вид спектра гамма-излучения I , испытывающего однофотонное поглощение в намагниченном вакууме нейтронной звезды с $B \sim 3 \cdot 10^{12}$ Гс, отдельно для необыкновенной (а) и обыкновенной (б) волн и в сумме по обеим поляризациям (в)



$$b_{1\parallel} = 2 / \ln[4\alpha r_0 \sin \theta / (3e^2 \lambda_c)] \simeq 0,062,$$

$$2.7 \cdot 10^{12} \text{ Гс} < B < 3.6 \cdot 10^{12} \text{ Гс}$$



Спектр I гамма - излучения от экваториального диска, после поглощения в намагниченном вакууме, нормированный на его невозмущённое значение, I_0 , для разных $\theta_0 = 40^\circ$ (штрихпунктирная линия) $\theta_0 = 60^\circ$ (штриховая линия) и $\theta_0 = 80^\circ$ (сплошная линия). $B = 3.1 \cdot 10^{12} \text{ Гс}$

Коллективная аннигиляция в вырожденной релятивистской $e^- e^+$ плазме

$$y^3 + Ry + Q = 0 \quad y = -i(\omega/\omega_0 - 1)^{1/2} \quad (3.16)$$

$$R = k/k_0 - 1 + \Phi b_0 \sin^2 \theta \quad Q = b_0 \sin^3 \theta \quad (3.17)$$

$$b_0 = \frac{\alpha}{8\sqrt{2}} \frac{B}{B_c} \exp\left(-\frac{2B_c}{B}\right) \quad (3.18)$$

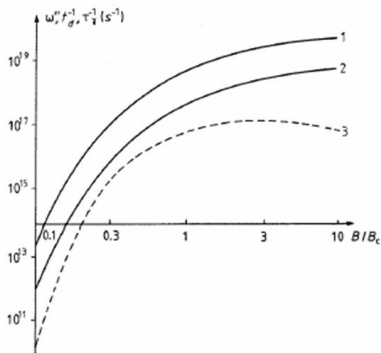
if we assume that $b_0 \ll 1$ and keep only the linear terms in the expansion of \mathcal{L}_g from (3.7) in a series in powers of $\beta/m_0c \ll 1$. In this resonance approximation $k_z \simeq |\omega_0/c| \cos \theta$ and

$$\chi_{zz}^r \simeq -\frac{b_0}{2\pi} \left\{ \Phi(p_F, k_z) + \frac{i[\eta(p_F - p_1) + \eta(p_F - p_2) - 1] \sin \theta}{(\omega/\omega_0 - 1)^{1/2}} \right\}. \quad (3.19)$$

Since we are interested in the solution to the dispersion equation in the case $p_F \gtrsim |\beta|$, when the imaginary part of (3.19) is greater than the dispersion factor Φ , we will not give the explicit dependence $\Phi(p_F, k_z)$. For the transverse propagation, we have

$$\Phi(\theta = \pi/2) = (2/\pi)^{3/2} [2(1 + m_0^2 c^2 / p_F^2)^{1/2} - 1]. \quad (3.20)$$

$$\frac{\omega''}{\omega_0} \simeq \frac{\sqrt{3} Q^{2/3}}{2} = \left[\frac{\alpha}{8\sqrt{2}} \frac{B}{B_c} \exp\left(-\frac{2B_c}{B}\right) \right]^{2/3} \frac{\sqrt{3} \sin^2 \theta}{2}. \quad (3.22)$$



$$\Delta p_F = \left(\frac{\omega''}{\omega_0} \right)^{1/2} \frac{\hbar \omega_0}{c \sin \theta}$$

Figure 10. The growth rate ω'' (3.22) (curve 1) and the inverse delay time τ_d^{-1} (3.31) (curve 2) of collective annihilation in a sample of a degenerate e^-e^+ plasma for $p_F \gtrsim \Delta p_F = (\hbar \omega_0 / c)(\omega'' / \omega_0)^{1/2}$, $\theta = \pi/2$, $s = L_c$, $\xi_d = 10$, and also the incoherent one-photon annihilation rate (curve 3) for $N_e = 4 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$ as functions of the magnetic field strength B/B_c .

$$E_z(t, s) \simeq E_0(0) \frac{4\pi s}{3ct} \left(\frac{3}{2\xi} \right)^{1/2} \exp \left[\xi \exp \left(-\frac{i\pi}{6} \right) \right] \quad (3.30)$$

$$\xi = \left[\frac{(6 \times 3^{1/2})s}{L_c} \right]^{2/3} (\omega'' t)^{1/3} \gg 1.$$

$$E_z(t, s) = E_{\text{NL}}(s/L_c)^{3/2} E_A(\xi)$$

$$E_{\text{NL}}^2 = 2\pi\hbar\omega_0 \sin^2 \theta \Delta N_e$$

$$E_m \simeq (s/L_c)^{3/2} E_{\text{NL}}^3 / \xi_d^{3/2}. \text{ For } s = L_c$$

$$\text{and } B = B_c \text{ the value } E_m \simeq 3 \times 10^{-4} B_c.$$

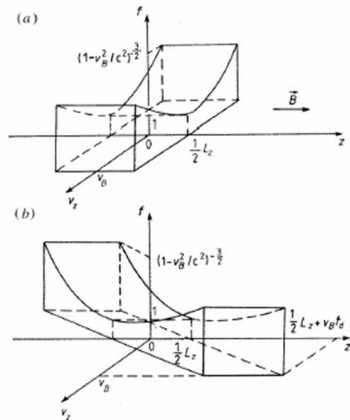


Figure 11. Spatiotemporal evolution of the distribution function $f(v_z, t, z)$ of e^-e^+ pairs flying apart along the magnetic field: (a) at the initial moment of time $t = 0$; (b) at the time of the maximum of the annihilation radiation, $t = t_d$. The boundary velocity $v_b = p_F(m_0^2 + p_F^2/c^2)^{-1/2}$.

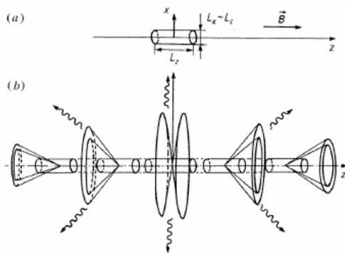


Figure 12. (a) Initial plasma bunch; (b) geometry of annihilation radiation, at different angles θ and different frequencies $\omega_0 = 2mc^2/\hbar \sin \theta$, of groups of e^-e^+ pairs flying apart from the initial plasma bunch with different longitudinal momenta $p_z = \hbar k_z/2 \simeq mc \cot \theta$ at the delay time $t = t_d$.

The power ΔW of the coherent γ -radiation from each group of e^-e^+ pairs with sizes $L_x \sim L_y \sim L_c$ and $L_z \sim \Delta L_z$ can be estimated by taking into account that in the time $\sim t_d$ approximately half of the pairs annihilate:

$$\Delta W \sim \frac{\hbar \omega_0 \Delta N_e L_c^2 \Delta L_z}{2t_d} = \frac{E_{NL}^2 L_c^2 c}{\sin \theta} \left(\frac{\omega''}{\omega_0} \right)^{1/2}. \quad (3.42)$$

For $B \sim B_c$ and $\sin \theta \sim 1$ we have $\Delta W \sim 10^{15}$ erg s^{-1} . The total radiation power of the whole plasma bunch is greater than (3.42) by a factor equal to the number of groups and by a length factor:

$$W \sim \Delta W \frac{2p_F}{\Delta p_F} \frac{L_z}{\Delta L_z}. \quad (3.43)$$

For $p_F \sim m_0c$, when $2p_F/\Delta p_F \simeq 20$, and $L_z/\Delta L_z \simeq 5$, we obtain $W \sim 10^{17}$ erg s^{-1} . This value corresponds, for example, to the annihilation of $\sim 10^6$ e^-e^+ pairs of density $N_e \sim 10^{30}$ cm^{-3} in a volume $\sim 1 \text{ \AA}^3$ in a time $t_d \sim 3 \times 10^{-18}$ s.

$$\begin{aligned}
 R_{1\gamma} \equiv \tau_{1\gamma}^{-1} &= \frac{eB}{2\pi\hbar c} \int_{-p_F}^{p_F} \frac{c^2 p_z}{E_0(p_z)} \sigma_{1\gamma}(p_z) \frac{dp_z}{2\pi\hbar} \\
 &= \frac{2\alpha m_0 c^2}{\hbar} \exp\left(-\frac{B_c}{B}\right) \int_0^{p_F/m_0 c} \frac{\exp[-(B_c/B)(1+x^2)^{1/2}] dx}{(1+x^2)^{1/2}}. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Here we have used the well known expression for the cross section of one-photon annihilation in the positron rest-frame [60]:

$$\sigma_{1\gamma}(p_z) = 4\pi^2 \alpha \lambda_c^2 \frac{m_0 c B_c}{p_z B} \exp\left\{-\left[1 + \left(1 + \left(\frac{p_z}{m_0 c}\right)^2\right)^{1/2}\right] \frac{B_c}{B}\right\}. \quad (3.45)$$

For somewhat lower magnetic fields ($B < B_c/4$) the one-photon annihilation rate decreases as compared with the two-photon rate: $R_{1\gamma} < R_{2\gamma}$; however, for relatively low densities, when $\Delta p_F \lesssim p_F \ll m_0 c$, the collective annihilation growth rate can remain greater than the rate of spontaneous two-photon annihilation, $R_{2\gamma} \ll \omega''$. Only with a further decrease of the magnetic field ($B < 0.1 B_c$) does two-photon annihilation become dominant.