

Лекция 2: Общие свойства и особенности волн в плазме

Кочаровский Вл.В.

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

4-ая Школа современной астрофизики, Пущино, 7-18 июля 2008г.

Диэлектрическая проницаемость плазмы.

Рассмотрим бесстолкновительную релятивистскую плазму

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Функцию распределения представим как сумму стационарной однородной части и малого возмущения: $f_\alpha = f_{0\alpha} + \delta f_\alpha$,

$$e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

При отсутствии внешних полей \mathbf{E} и \mathbf{B} также являются малым возмущением и последним слагаемым можно пренебречь:

$$e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

Для гармонических возмущений ($\propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$)

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$$

$$-i\omega\delta f_\alpha + i\mathbf{k}\mathbf{v}\delta f_\alpha + e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\omega} (\mathbf{k}(\mathbf{vE}) - \mathbf{E}(\mathbf{vk})) \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

$$\delta f_\alpha = -i \frac{e_\alpha (\omega \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{vE}) - \mathbf{E}(\mathbf{vk}))}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}$$

Индукцированный ток

$$\mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int \mathbf{v} \delta f_\alpha d^3 \mathbf{p} = -ie_\alpha^2 \int \mathbf{v} \frac{(\omega \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{vE}) - \mathbf{E}(\mathbf{vk})) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} d^3 \mathbf{p}$$

В тензорных обозначениях

$$j_i = \sigma_{ij} E_j = -i \sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 \int v_i \frac{(\omega \delta_{lj} E_j + k_l v_j E_j - \delta_{lj} E_j(\mathbf{v}\mathbf{k})) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l}}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} d^3 \mathbf{p}.$$

Тензор диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \\ &= \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int v_i \frac{(k_l v_j + \delta_{lj}(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_l}}{\omega(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} d^3 \mathbf{p} \end{aligned}$$

Если $f_{0\alpha}(\mathbf{p}) = f_{0\alpha}(p)$ (изотропный случай), то

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int_C \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{v(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{df_{0\alpha}}{dp} d\mathbf{p},$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega k^2} \int_C \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2}{v(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})} \frac{df_{0\alpha}}{dp} d\mathbf{p}$$

$$r_D^{-2} = - \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha}^2 \int \frac{df_{0\alpha}}{v dp} d\mathbf{p}$$

$$r_D^{-2} = \sum_{\alpha} \frac{8\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{f_{0\alpha}}{c^2 \gamma} d\mathbf{p} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{f_{0\alpha}}{v^2 \gamma^3} d\mathbf{p}$$

Диэлектрическая проницаемость плазмы в постоянном магнитном поле

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathcal{E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{ij}^{(n)} \times$$
$$\times \left[\frac{\mathcal{P}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n e_{\alpha} B / m_{\alpha} c \gamma_{\alpha}} - i\pi \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n e_{\alpha} B / m_{\alpha} c \gamma_{\alpha}) \right]$$

(если функция распределения $f_{0\alpha}$ изотропна)

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} - i^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \quad (4.94)$$

где

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \frac{D_{\alpha\beta}^l(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})}{\omega - \omega_l(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})},$$

$$D_{\alpha\beta}^l = \frac{8\pi^2 e^2 p_{\perp}}{m_e^2 \omega^2} \times \quad (4.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Ap_{\perp} J_l^2 l^2 \xi^{-2} & -Ap_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} & Cp_{\perp} J_l^2 l^2 \xi^{-2} - Bp_{\perp} J_l^2 l \xi^{-1} \\ Ap_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} & -Ap_{\perp} J_l'^2 & Cp_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} - Bp_{\perp} J_l J_l' \\ -Ap_{\parallel} J_l'^2 l \xi^{-1} & Ap_{\parallel} J_l J_l' & -Cp_{\parallel} J_l'^2 l \xi^{-1} + Bp_{\parallel} J_l'^2 \end{array} \right\},$$

$$A = (m\omega - k_{\parallel} p_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}},$$

$$B = m\omega \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}, \quad C = k_{\perp} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right),$$

$$\omega_l = l\Omega_B + k_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{m}, \quad \xi = \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m\Omega_B}.$$

Циклотронные волны при продольном распространении

Вне линии

$$|\omega - \omega_{Be}| \gg \left[\omega_{pe}^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \Omega_{Be} \right]^{1/3}$$

$$n^2 \equiv \left(\frac{c}{\omega} \operatorname{Re} k \right)^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{Be})}$$

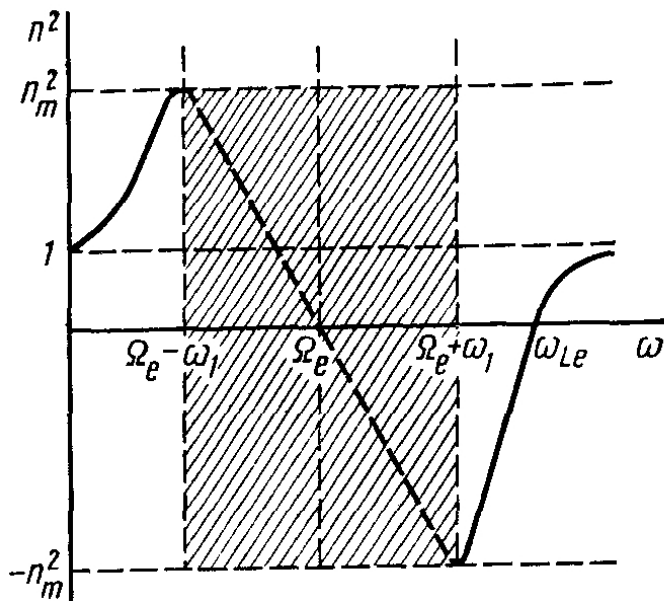
$$\frac{c}{\omega} \operatorname{Im} k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{c}{v_{Te}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \exp \left(- \frac{(\omega - \Omega_{Be})^2 c^2}{2 \varepsilon \omega^2 v_{Te}^2} \right)$$

Внутри линии

$$\frac{ck}{\omega} = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 c}{\omega^2 v_{Te}} \right)^{1/3}$$

$$\lambda_{\text{skin}} = (\operatorname{Im} k)^{-1} = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^2 v_{Te}}{\omega \omega_{pe}^2} \right)^{1/3}$$

Показатель преломления циклотронных волн.



Диссипативные процессы

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{S}_f + \mathbf{S}_p) = -\langle \mathbf{j}_{\text{ext}} \mathbf{E} \rangle + q + \frac{i}{16\pi} \left(\frac{\partial \omega \varepsilon''_{ij}}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial E_i}{\partial t} E_j^* - \frac{\partial E_i^*}{\partial t} E_j \right) -$$

$$- \frac{i\omega}{16\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon''_{ij}}{\partial k_l} \right) \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_l} E_j^* - \frac{\partial E_i^*}{\partial x_l} E_j \right).$$

$$w = \frac{1}{16\pi} \left[B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right],$$

$$\mathbf{S}_f = \frac{c}{16\pi} ([\mathbf{E}^* \mathbf{B}] + [\mathbf{E} \mathbf{B}^*]), \quad \mathbf{S}_{pl} = -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial k_l} \mathbf{E}_i^* \mathbf{E}_j \exp(2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})$$

$$q = \frac{i\omega}{16\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})] E_i(\omega, \mathbf{k}, t) E_j^*(\omega, \mathbf{k}, t).$$

$$\mathbf{v}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad w \cdot \mathbf{v}_{gr} = \mathbf{S}$$

$$\text{Im} \omega = -v_{gr} \text{Im} k.$$

Затухание Ландау

Для продольных волн в изотропной плазме

$$Q = \frac{\omega m}{8\pi} \text{Im}\epsilon' |\mathbf{E}|^2,$$

$$\text{Im}\epsilon' = -\frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \frac{df(p_{\parallel})}{dp_{\parallel}} \quad \text{при } v_{\parallel} = \omega/k.$$

Черенковское поглощение (при $v \cos \theta < v_{ph}$) и черенковское излучение (при $v \cos \theta > v_{ph}$).

Релятивистское затухание Ландау продольных волн

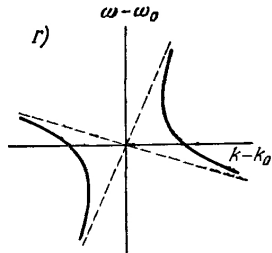
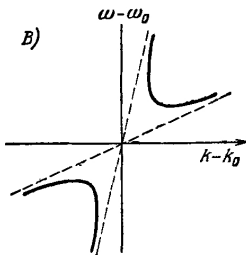
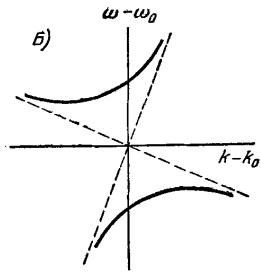
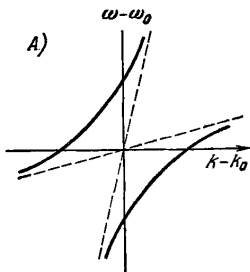
$$\omega_{k=0} = \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{T_e} K_2^{-1} \left(\frac{mc^2}{T_e} \right) \int_1^\infty K_2 \left(\frac{mc^2}{T_e} z \right) \frac{dz}{z^2} \approx \frac{4\pi e^2 N_e c^2}{3T_e} \quad \text{при } T_e \gg mc^2$$

При $\omega < ck$

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega &= \frac{\pi \omega_{pe}^2 \omega_{k=0}^2 m}{2 k^3 c T} K_2^{-1} \left(\frac{mc^2}{T} \right) \exp \left(-\frac{mc^2}{T \sqrt{1 - \omega^2/c^2 k^2}} \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{1 - \omega^2/c^2 k^2} + 2 \frac{T}{mc^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/c^2 k^2}} + 2 \frac{T^2}{(mc^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Для поперечных волн $\text{Im } \omega \equiv 0$.

Пересечение дисперсионных ветвей. Абсолютная и конвективная неустойчивость



Линейное взаимодействие волн

Монохроматические волны в неоднородной среде описываются в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$e' = -iT e.$$

Здесь через e обозначен N -компонентный вектор-столбец комплексных полевых переменных $A_\alpha (\alpha = \overline{1, N})$; квадратная матрица $T = T(\zeta)$ определяется локальными свойствами среды. Штрих обозначает дифференцирование по безразмерной пространственной переменной $\zeta = k_0 z$.

Определим для матрицы T в каждой точке среды полную систему собственных векторов e_j — нормальные волны, для которых $e_j e_j^* = 1$, и их собственные значения — показатели преломления n_j с помощью уравнения

$$T e_j = n_j e_j.$$

Линейное взаимодействие волн

Воспользуемся канонической заменой

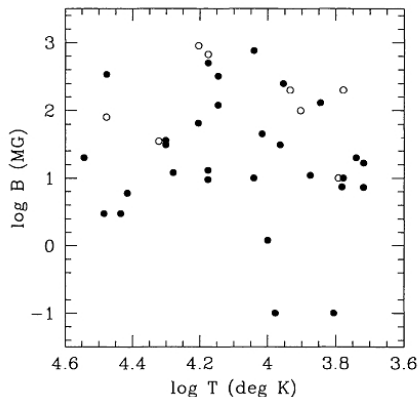
$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^N f_i \vec{\mathcal{E}}_i, \quad \vec{\mathcal{E}}_i = \Phi_i \mathbf{e}_i,$$

и перейдем к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн

$$f_i' + in_i f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j, \quad a_{ij} = -\vec{\mathcal{E}}_j' \cdot \vec{\mathcal{E}}_i'^*.$$

При переходе использована взаимная (к $\vec{\mathcal{E}}$) система векторов $\vec{\mathcal{E}}_i'^*$, $\vec{\mathcal{E}}_j' \cdot \vec{\mathcal{E}}_i'^* = \delta_{ij}$. Множители Φ_i определяются из условия $a_{ii} \equiv -\vec{\mathcal{E}}_i' \cdot \vec{\mathcal{E}}_i'^* = 0$.

Поляризационно-спектральный анализ излучения космических объектов

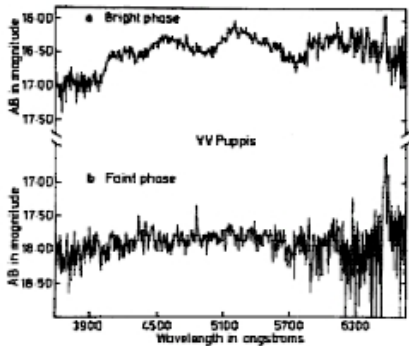
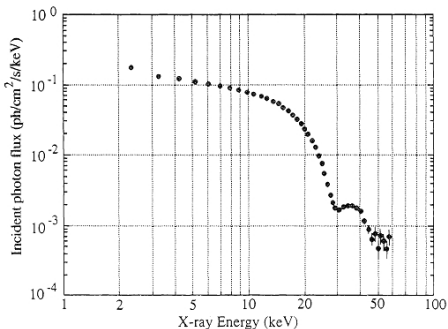


Методы измерения магнитного поля:

- Круговая поляризация излучения из-за разницы в оптических толщинах для необыкновенной и обыкновенной волн.
- Зеемановское расщепление резонансных линий: линейное для $B < 20$ МГс, квадратичное для $B > 20$ МГс.
- Отождествление циклотронных линий.

Температура и магнитные поля магнитных белых карликов. Закрашенные точки для водородных белых карликов, пустые для неводородных или смешанного типа (Liebert (1995)).

Циклотронные линии



Слева — циклотронная линия вблизи 28.5keV в транзитном пульсаре X0331+53 (Makishima et al. (1990)). Справа — циклотронные особенности в спектре поляр VV Puppis (Visvanathan and Wickramasinghe (1979)).