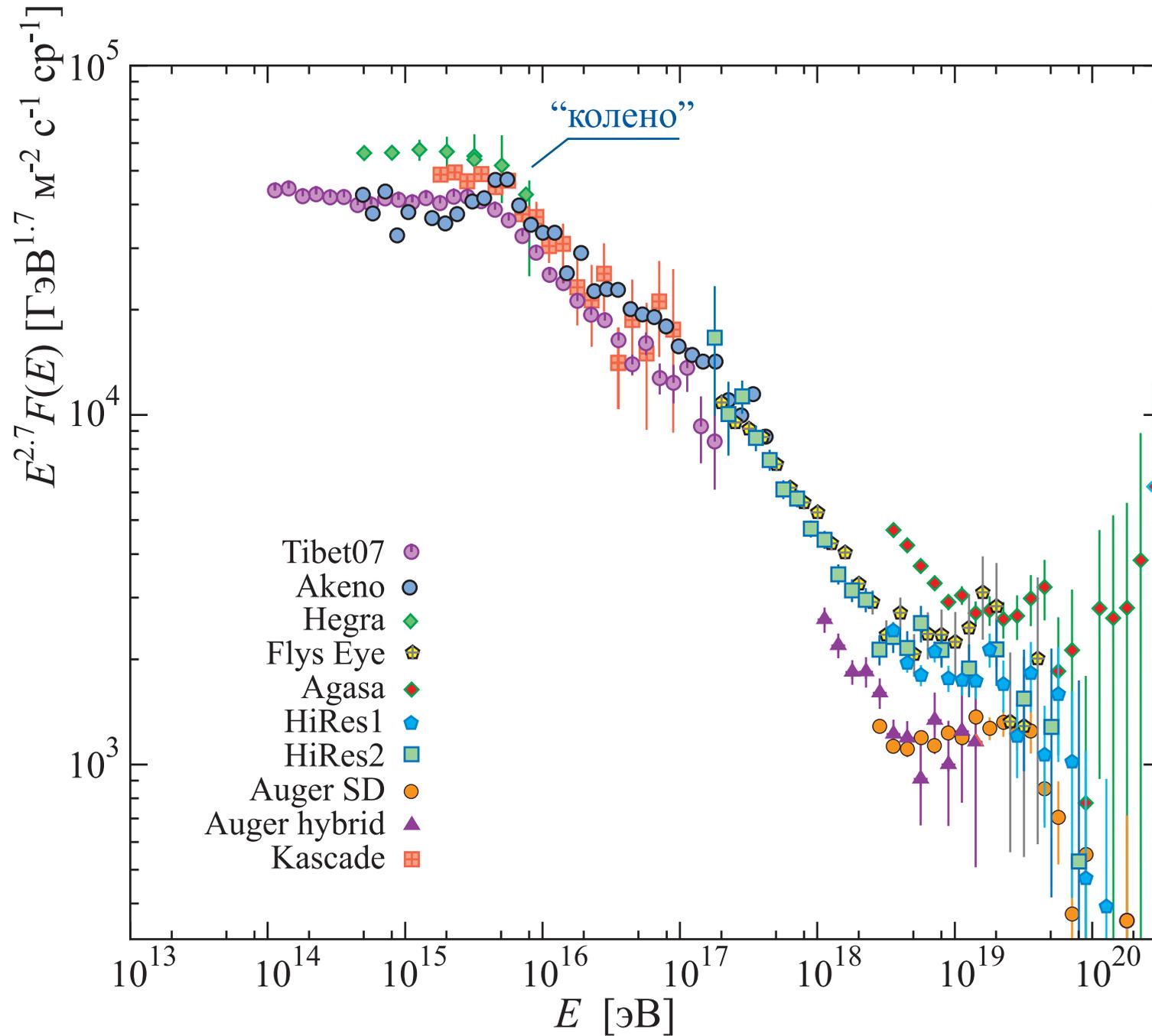


**Волновые и кинетические процессы  
в релятивистской плазме  
Лекция 10**

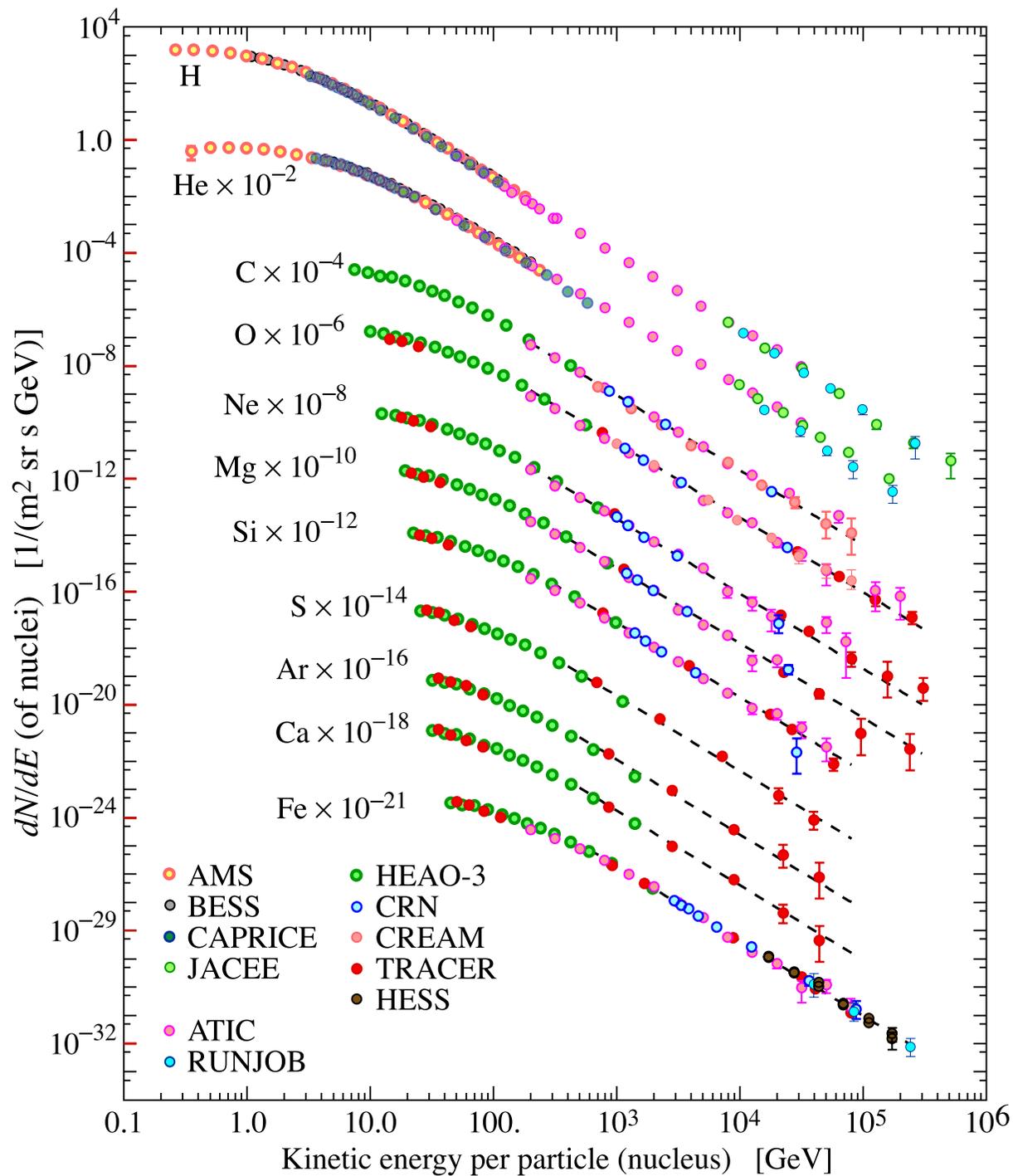
Е.В. Деришев

*Институт прикладной физики РАН*

# Спектр космических лучей

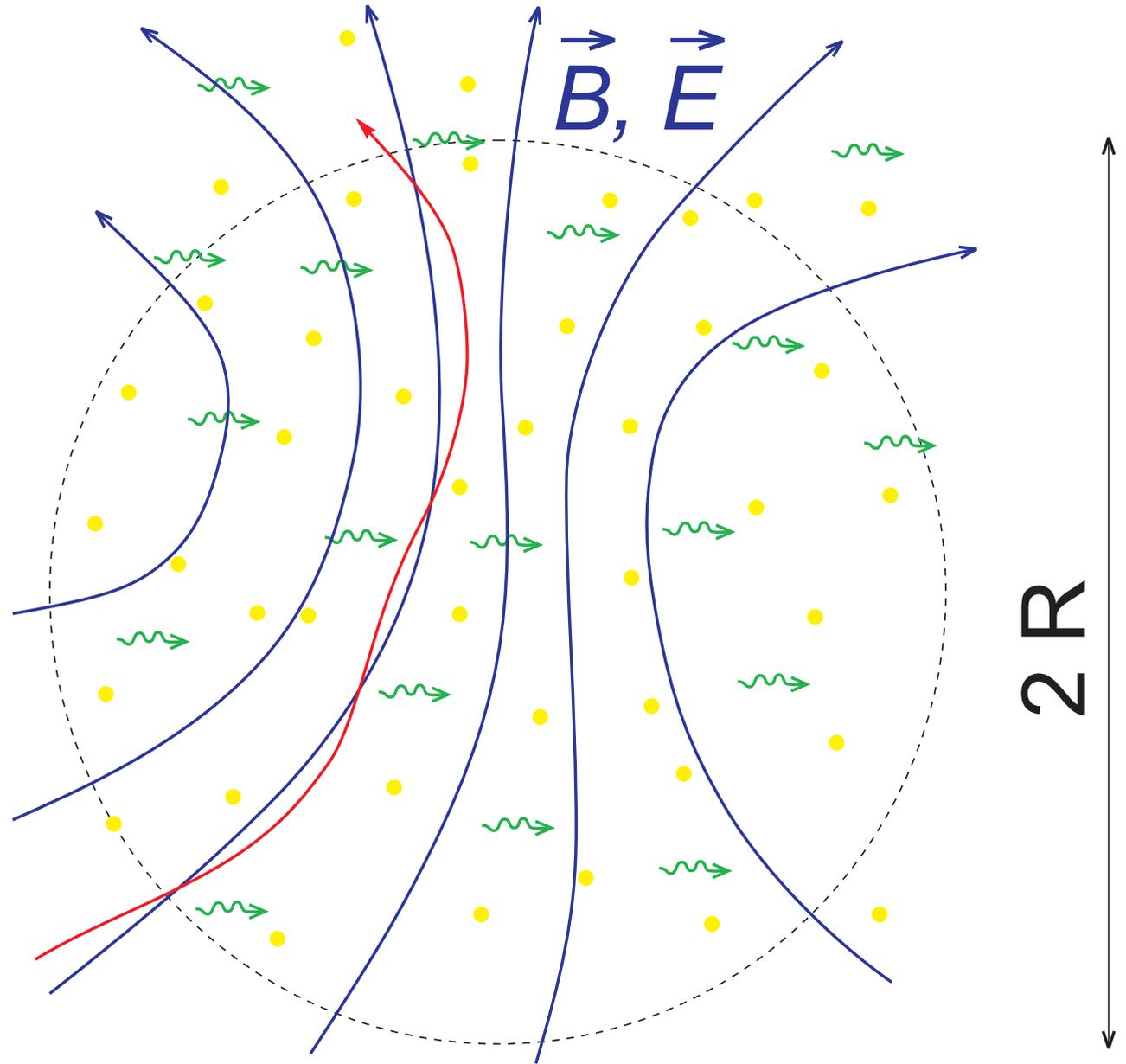


# Состав космических лучей



## Потери энергии

- синхротронное излучение
- тормозное излучение
- изгибное излучение
- столкновения
- взаимодействие с фотонами



## Максимально достижимая энергия частиц

Темп ускорения  $\dot{\varepsilon} = qE_{\text{eff}} c \equiv \eta q V c$

$E_{\text{eff}} \equiv \eta V$  – эффективное ускоряющее поле

$q, \varepsilon$  – заряд и энергия частицы

Потери на изгибное излучение  $\dot{\varepsilon}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \gamma^4 \frac{q^2}{R^2} c$

$\gamma$  – лоренц-фактор частицы

Ускорение прекращается при  $\varepsilon_{\text{max}}^4 = \frac{3}{2} (mc^2)^4 \frac{\eta B R^2}{q}$

$m$  – масса частицы

В отсутствие потерь  $\varepsilon_{\text{max}} < qR \times \max\{B, E_{\text{eff}}\}$

## Требования к энергетике источника

Энергия электромагнитного поля в ускорителе

$$W_{em} = R^3(B^2 + E^2)/6$$

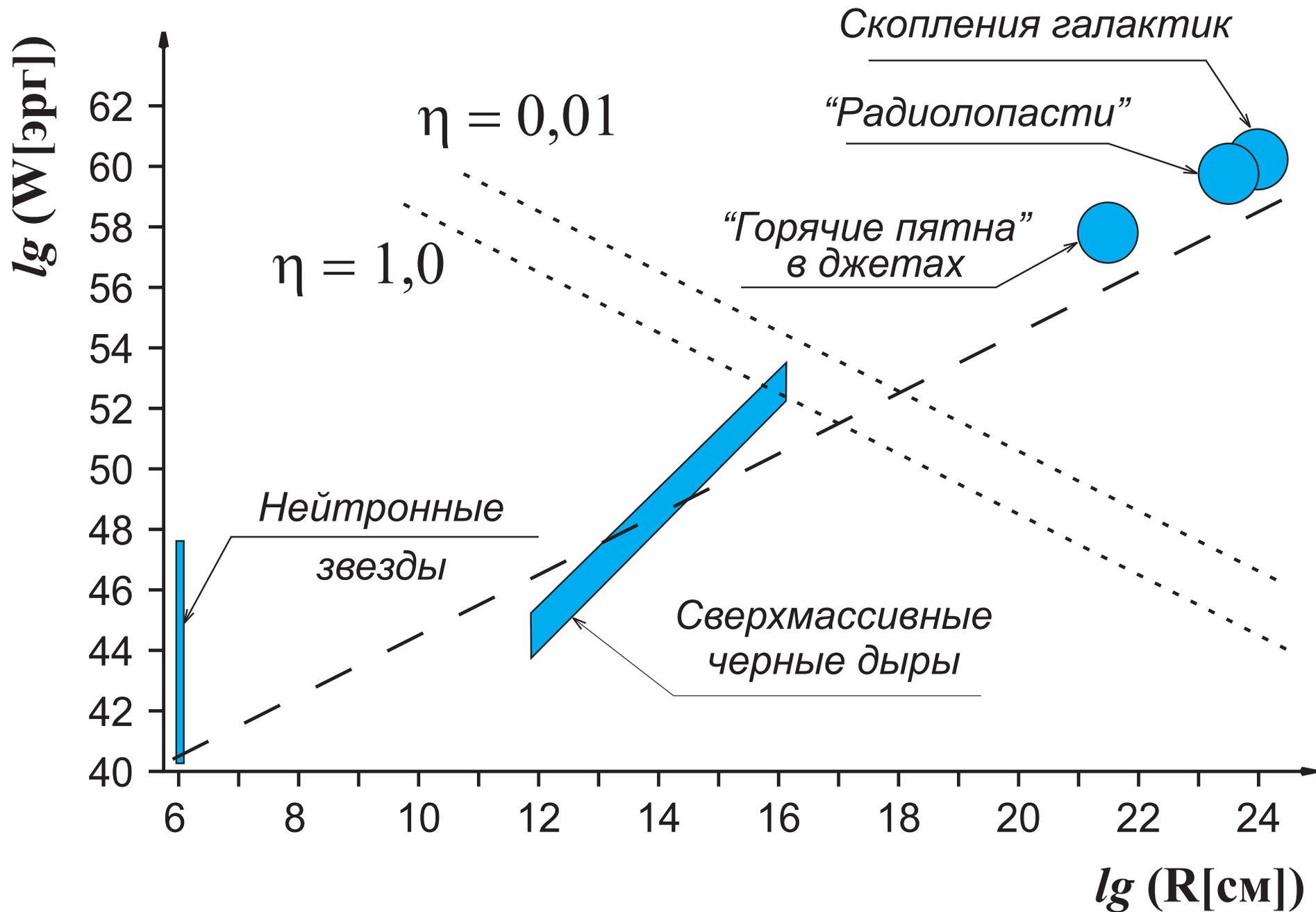
$$W_{em} > \frac{2 q^2}{27 R} \left( \frac{\varepsilon_{max}}{mc^2} \right)^8 \frac{1 + \eta^2}{\eta^2}$$

— если ускорение ограничено потерями на излучение

$$W_{em} > \frac{R}{6} \left( \frac{\varepsilon_{max}}{q} \right)^2$$

— если ускорение ограничено убеганием частиц

# Ускорение протонов до $10^{20}$ эВ



## Оптимальный ускоритель

Оптимальный размер ускорителя

$$R^{(\text{opt})} \simeq \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \frac{q^2 \epsilon_{\text{max}}^3}{(mc^2)^4}$$

при соответствующем оптимальном магнитном поле

$$B^{(\text{opt})} \simeq \frac{3}{2} \frac{\eta}{1 + \eta^2} \frac{(mc^2)^4}{q^3 \epsilon_{\text{max}}^2}$$

минимизирует требования к энергосодержанию ускорителя:

$$W_{\text{em}}^{(\text{opt})} \simeq \frac{1}{9} \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \frac{\epsilon_{\text{max}}^5}{(mc^2)^4}$$

## Оптимальный ускоритель (релятивистское течение)

$$W_{\text{em}}^{(\text{opt})} \simeq \frac{1}{9\Gamma^4} \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \frac{\varepsilon_{\text{max}}^5}{(mc^2)^4}$$

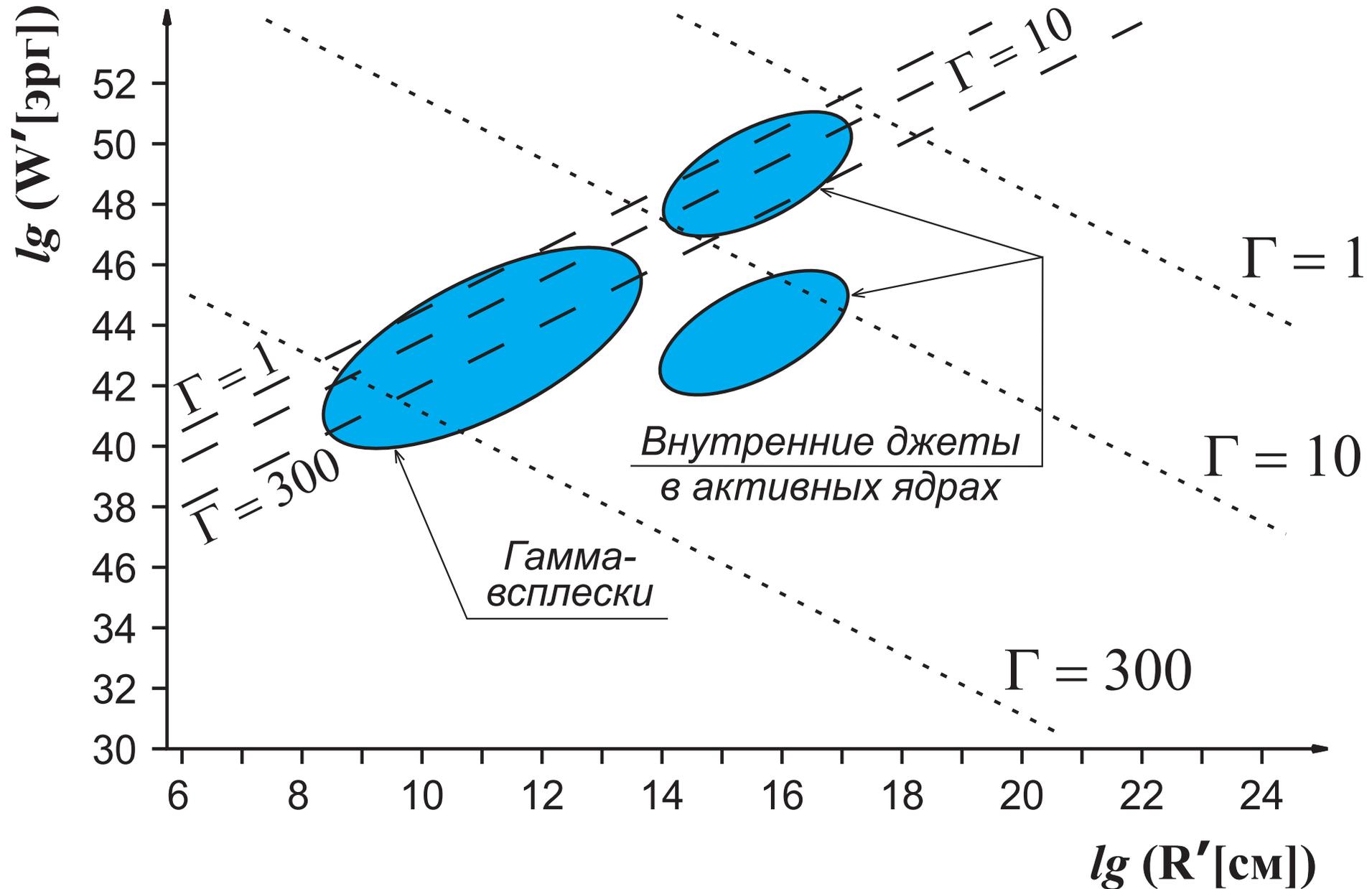
$$R'^{(\text{opt})} \simeq \frac{2}{3\Gamma^3} \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \frac{q^2 \varepsilon_{\text{max}}^3}{(mc^2)^4}$$

$$B'^{(\text{opt})} \simeq \frac{3\Gamma^2}{2} \frac{\eta}{1+\eta^2} \frac{(mc^2)^4}{q^3 \varepsilon_{\text{max}}^2}$$

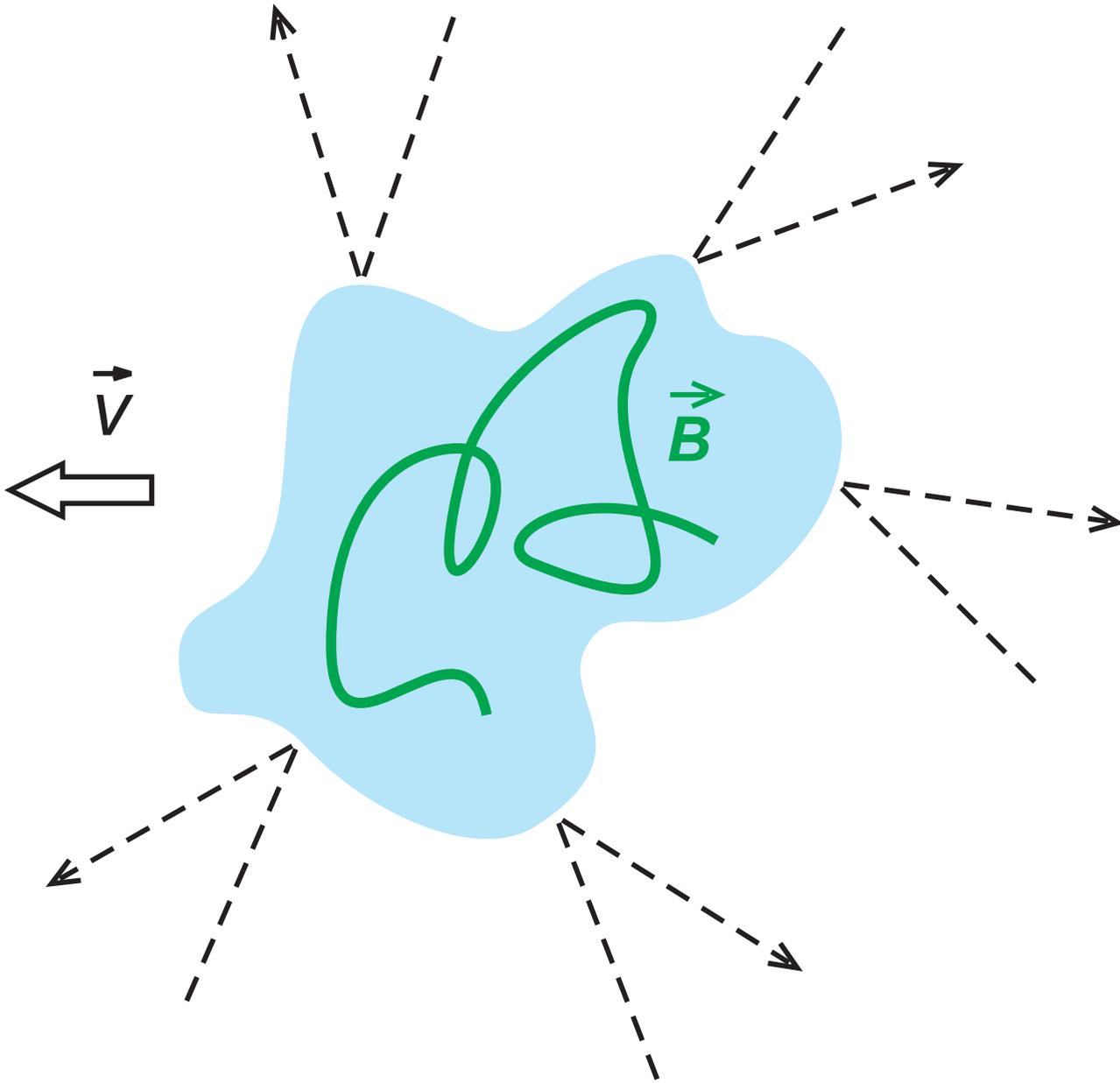
$\Gamma \gg 1$  — лоренц-фактор течения

Величины со штрихом измеряются в сопутствующей системе,  
без штриха — в лабораторной

# Ускорение протонов до $10^{20}$ эВ



# Механизм Ферми



Изменение энергии  
релятивистской частицы  
в одном столкновении

$$\Delta\varepsilon = \frac{4}{3} \frac{v^2}{c^2} \varepsilon$$

(в среднем по изотропной  
функции распределения)

# Ускорение частиц: гидродинамика + кинетика

- Кинетическое уравнение для ускоряемых частиц

$$\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + u \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x, p) \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial x} \right) - \frac{p}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial p} = Q(x, p)$$

$x$  – координата вдоль нормали к фронту ударной волны

$p$  – импульс частицы

$t$  – время

$u$  – скорость гидродинамического течения

$f(x, p, t)$  – функция распределения ускоряемых частиц

$D(x, p, t)$  – коэффициент диффузии

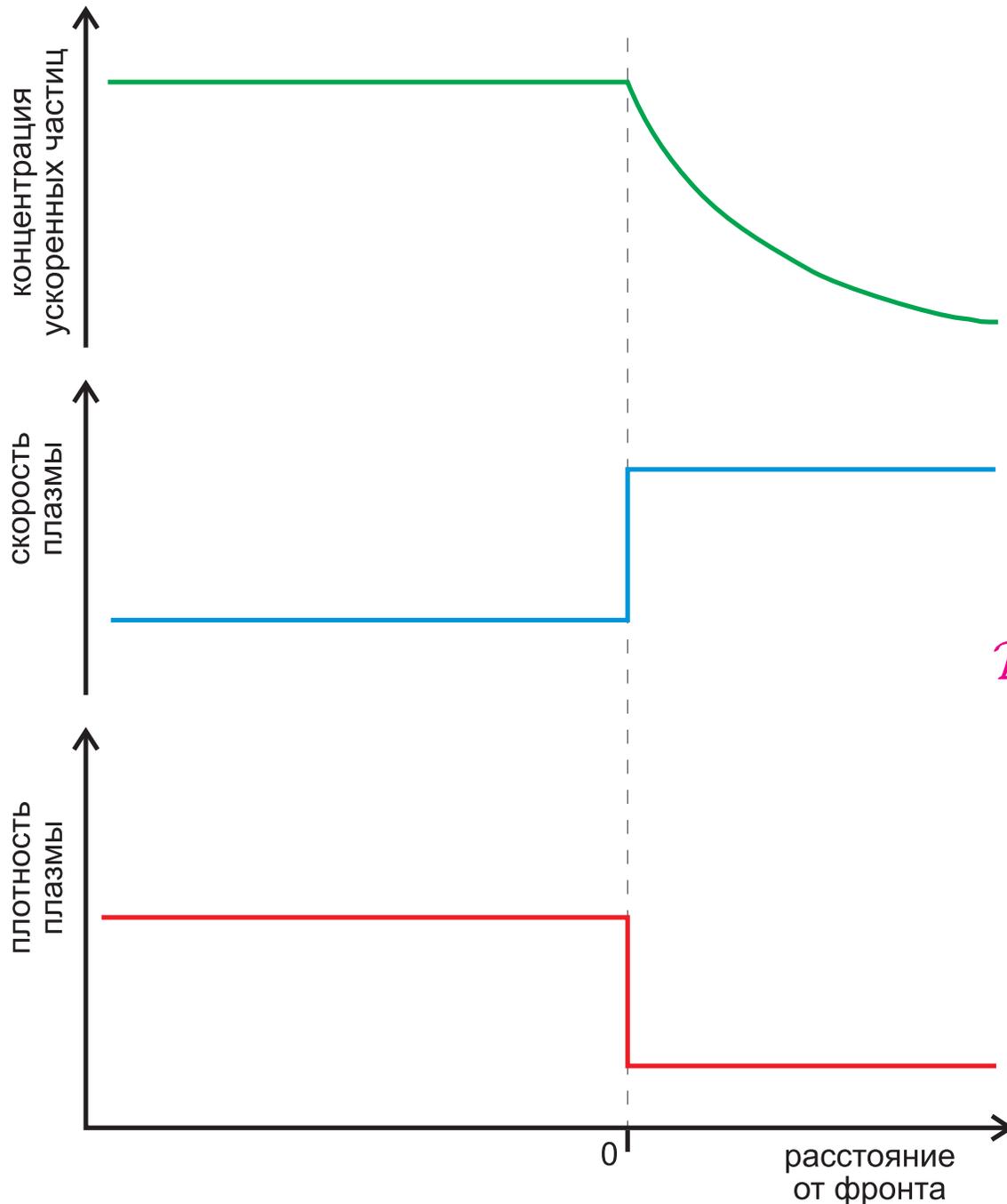
$Q(x, p) = Q_0(p)\delta(x)$  – функция инжекции

- Граничное условие (на фронте ударной волны)

$$\frac{1}{3} (u_1 - u_2) p \frac{\partial f}{\partial p} = D_2 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_2 - D_1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_1 + Q_0(p)$$

(1) и (2) – области течения перед фронтом ударной волны и за ним

# Ускорение на ударной волне



Темп ускорения

$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{1}{6} \frac{r-1}{r} \frac{V^2}{D} \varepsilon \quad \left( \eta \approx \frac{V^2}{c^2} \right)$$

$$r = \frac{u_1}{u_2} \leq 4 \text{ — степень сжатия в ударной волне}$$

$V$  — скорость ударной волны

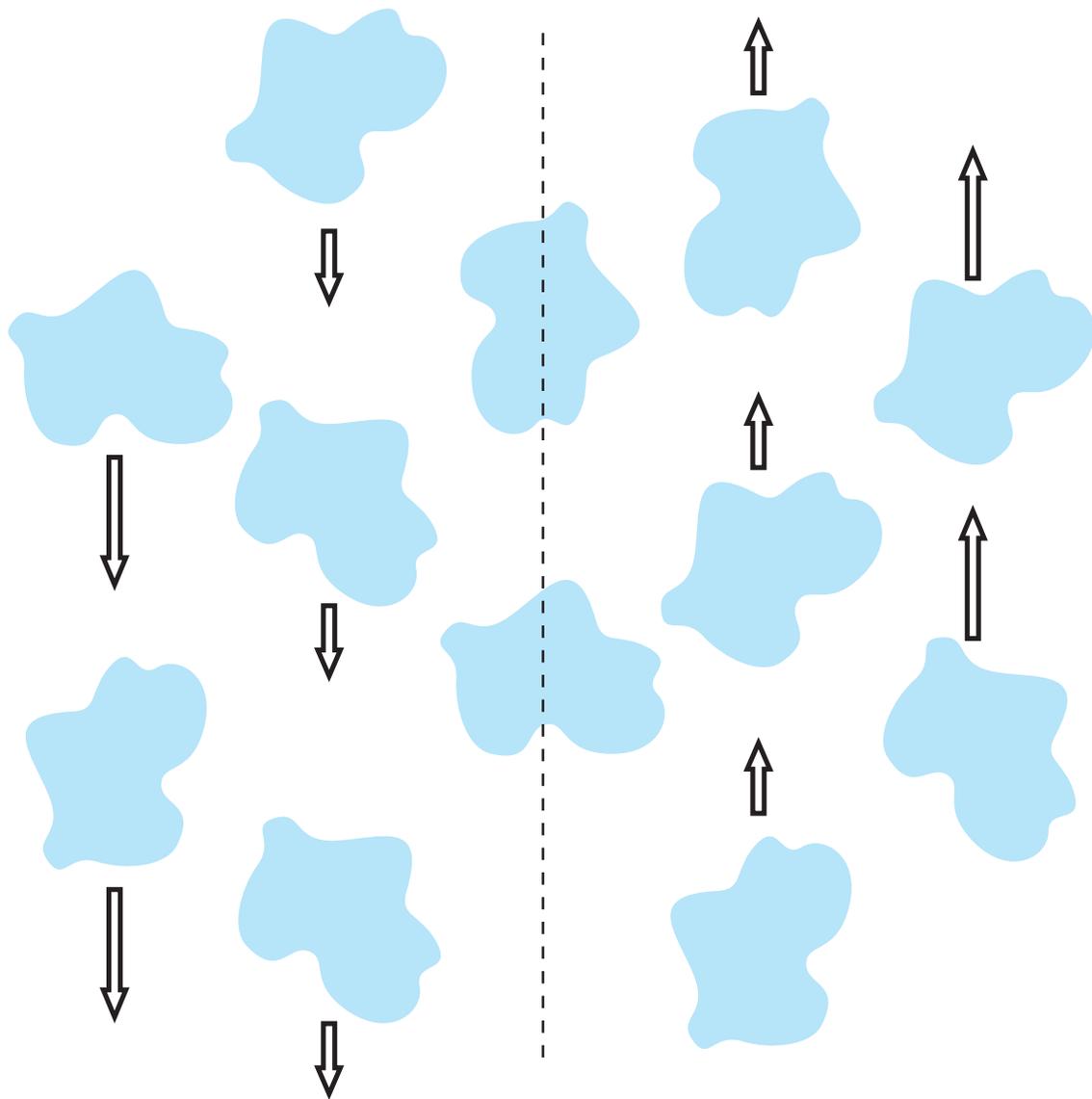
$$D = \frac{pc^2}{3eB} \text{ для боровской диффузии}$$

Спектр ускоренных

частиц  $\frac{dN}{d\varepsilon} \propto \varepsilon^{-\alpha}$

$$\alpha = -\frac{r+2}{r-1}$$

# Ускорение в сдвиговых течениях



Темп ускорения

$$\dot{\varepsilon} = 3\mathcal{D} \left( \frac{\nabla V}{c} \right)^2 \varepsilon$$

Для боровской диффузии

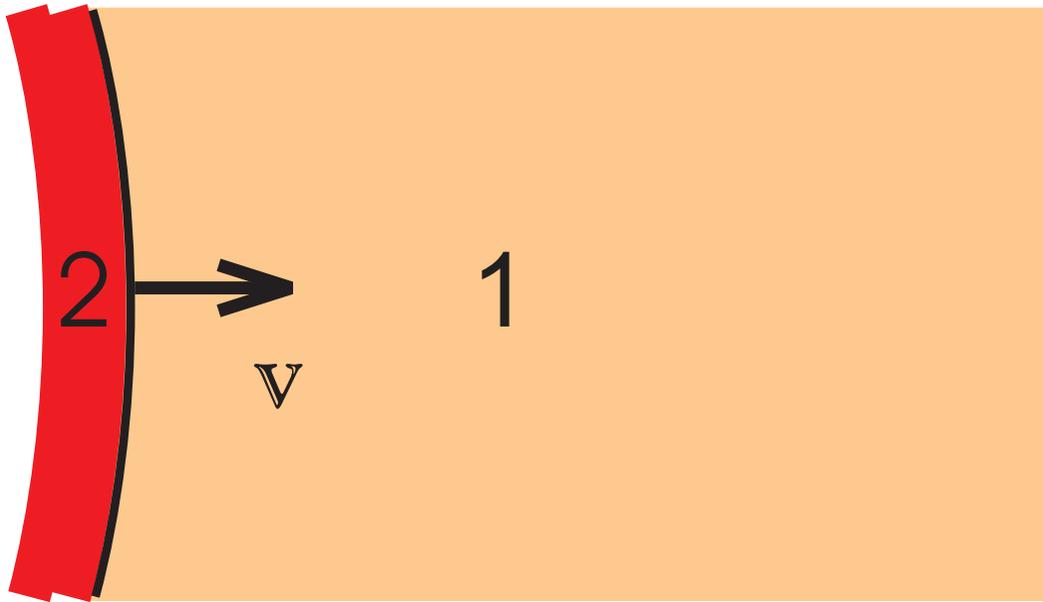
$$\dot{\varepsilon} = \frac{(\nabla V)^2}{\omega_B} \varepsilon = \frac{(\nabla V)^2}{eBc} \varepsilon^2$$

$\varepsilon$  – энергия частицы

$\omega_B$  – гирочастота

$$\mathcal{D} = \frac{c^2}{3\omega_B}$$

# Релятивистская ударная волна



Ультрарелятивистский предел адиабаты Тауба:

$$\begin{cases} p_2 \equiv \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}\Gamma^2(n_1 mc^2 + p_1) \\ n_2 = 2\Gamma^2 n_1 \\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma \end{cases}$$

$\Gamma$  и  $\gamma$  – лоренц-факторы ударной волны и вещества,  
 $e$  – плотность энергии,  $p$  – давление,  
 $n$  – концентрация,  
 $mc^2$  – энергия покоя частиц

Средняя энергия частиц за фронтом:  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 mc^2$ ,  
средняя концентрация в собственной системе:  $n'_2 = 2\sqrt{2}\Gamma n_1$

Существует два критерия малости:

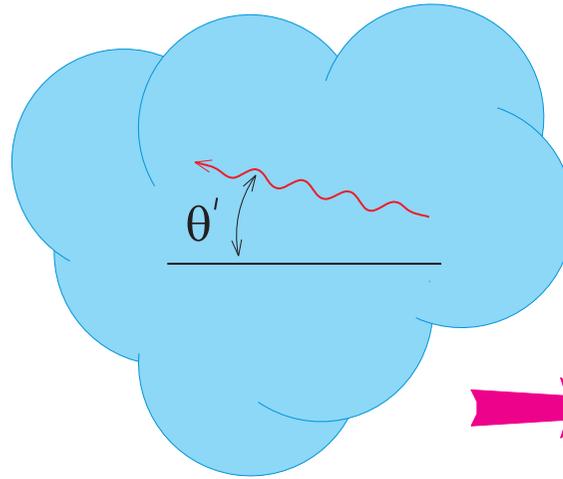
вероятность превращения заряженной частицы в нейтральную  $\ll 1$   
и вероятность обратного превращения  $\ll 1/\Gamma^2$

# Преобразования Лоренца (напоминание)

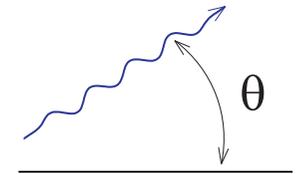
- Углы:  $\cos \theta = \frac{\beta - \cos \theta'}{1 - \beta \cos \theta'}$  ;  $\cos \theta' = \frac{\beta - \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta}$
- Интенсивность:  $I'_\omega(\omega') = \delta^3 \times I_\omega(\omega)$
- Частота:  $\omega' = \delta \times \omega$

$\delta = \gamma(1 - \beta \cos \theta)$  —  
доплер-фактор.

**Сопутствующая  
система**



**Лабораторная  
система**

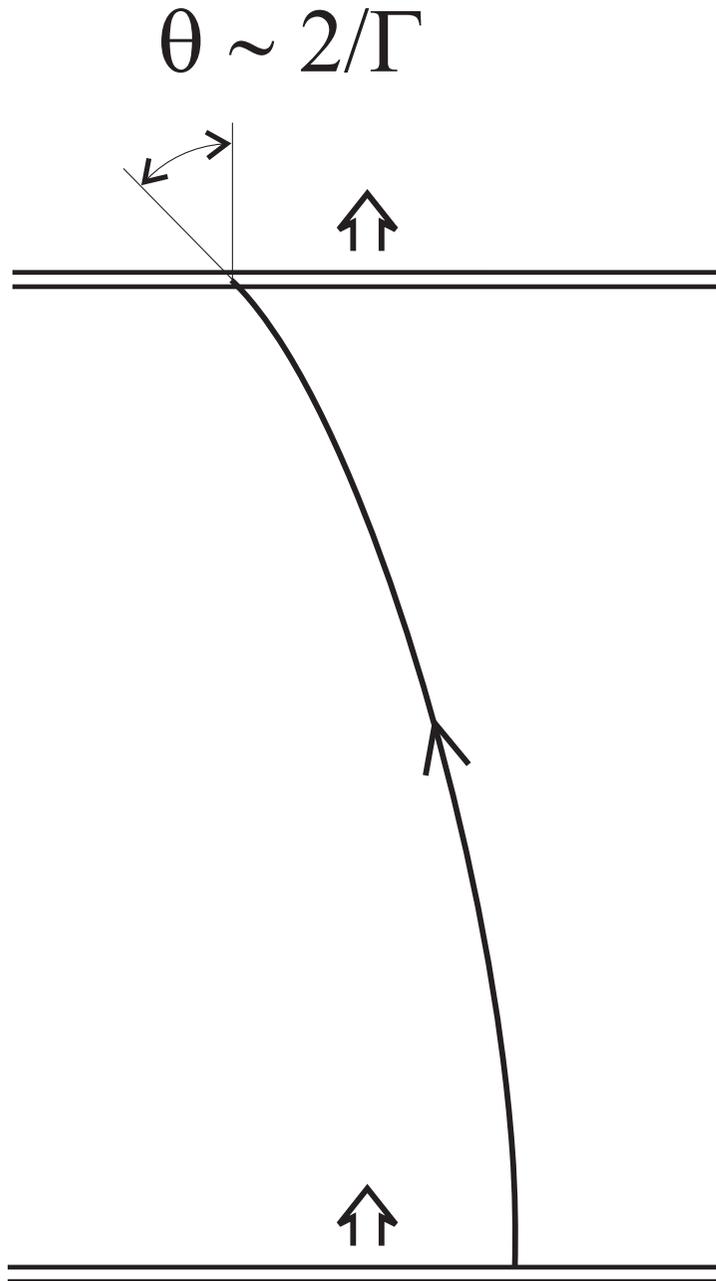


Для малых углов  
можно использовать

$$\theta \simeq \frac{2}{\sqrt{(\gamma\theta')^2 + 1}} \quad \text{и} \quad \delta \simeq \frac{(\gamma\theta')^2 + 1}{2\gamma}$$

$$v \sim c$$

# Ускорение на релятивистской ударной волне



Распределение ускоренных частиц сильно коллимировано.

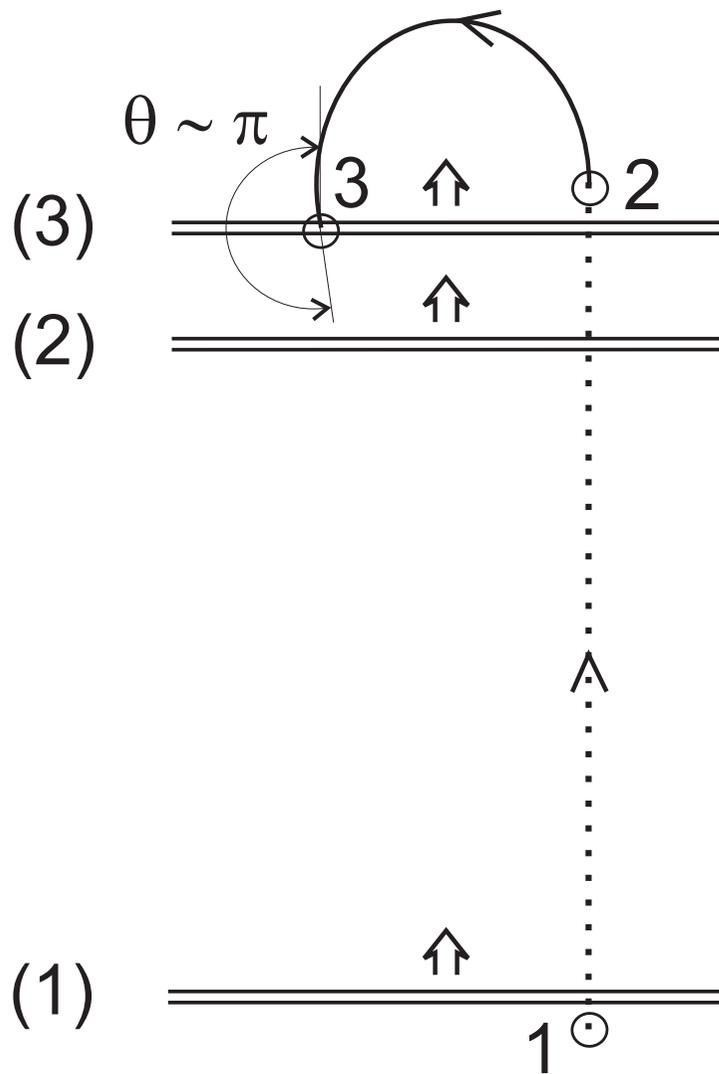
Увеличение энергии в  $g = (1/2) (\Gamma\theta)^2 \simeq 2$  раз за цикл

Вероятность выхода частицы из ударной волны должна быть  $\sim 1$  для эффективного ускорения. Эта вероятность зависит от геометрии силовых линий.

Благоприятная геометрия:  $\frac{dN}{d\varepsilon} \propto \varepsilon^{-\frac{22}{9}}$

“Реалистичная” геометрия: очень мягкие спектры, энергия частиц около  $\Gamma^2 mc^2$   
(Niemiec & Ostrowski, ApJ 2006;  
Lemoine, Pelletier & Revenu, ApJ 2006)

# Ускорение с конверсией частиц



Изотропизация во внешней среде ( $\theta \sim 1$ )  
приводит к увеличению энергии

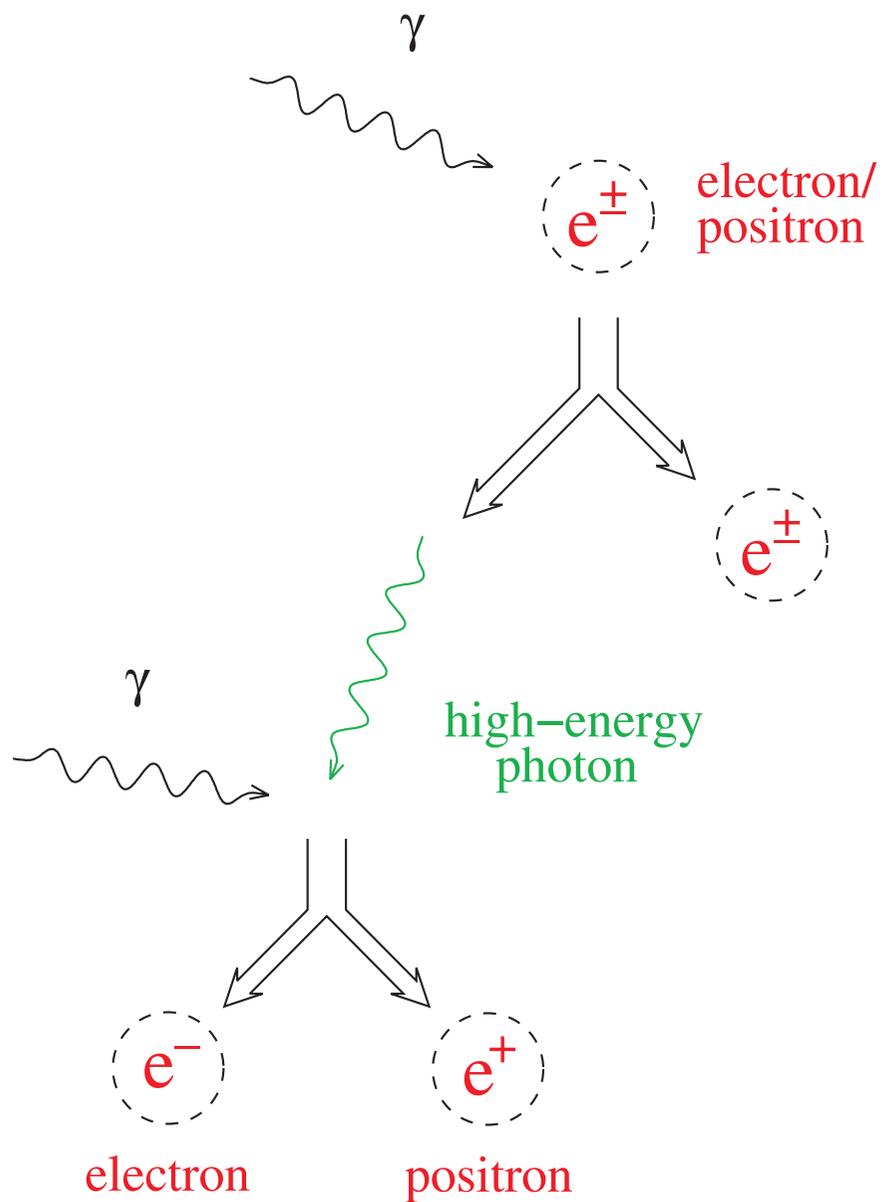
в  $g = \frac{1}{2} (\Gamma \theta)^2 \sim \Gamma^2$  раз за цикл

Столкновения с фотонами обратимо  
“превращают” ускоряемые частицы в  
нейтральные

⇒ **Конверсионный механизм  
ускорения**

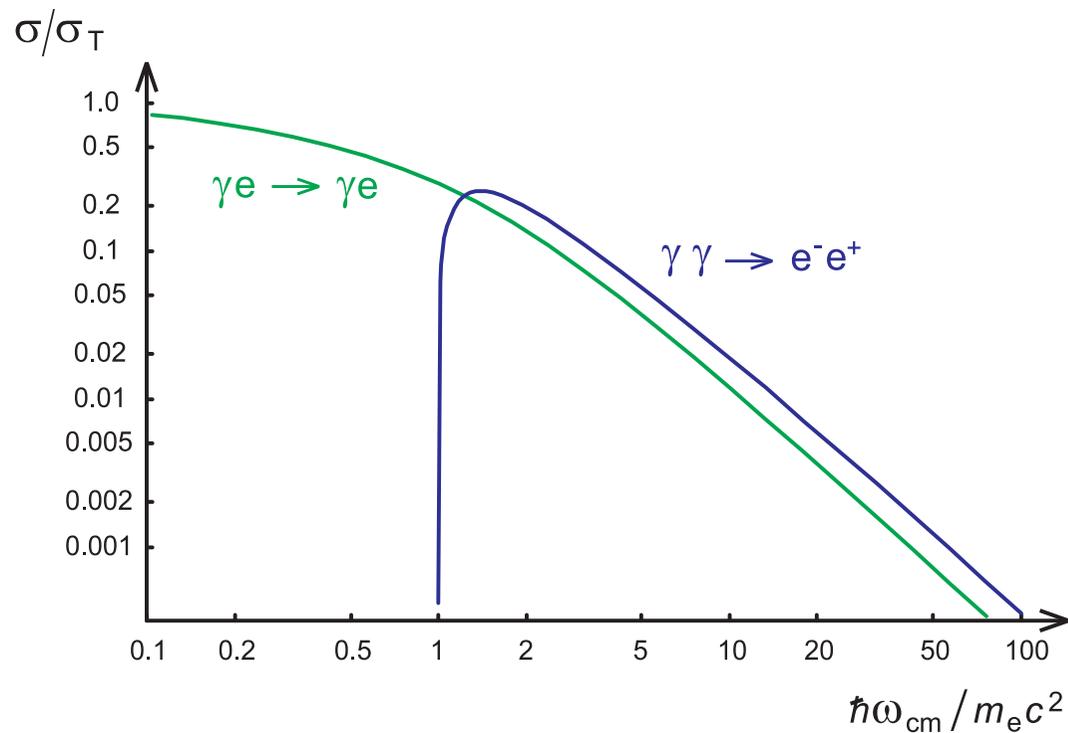
- (1) – превращение частицы в нейтральную
- (2) – обратное превращение в заряженную
- (3) – встреча с фронтом ударной волны

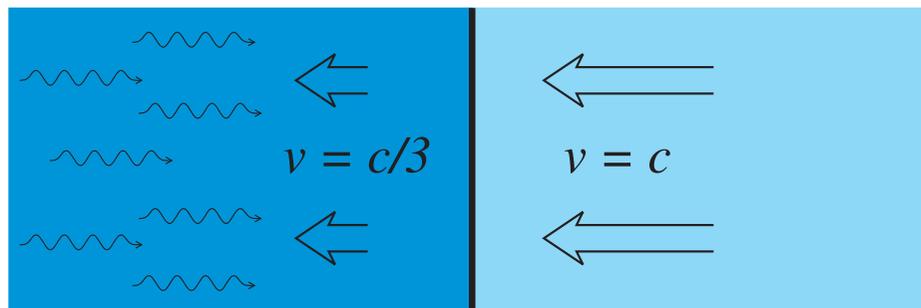
# Конверсия для электронов и позитронов



Рассеяние фотонов идет  
в клейн-нишиновском режиме

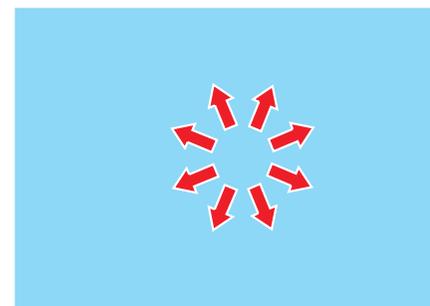
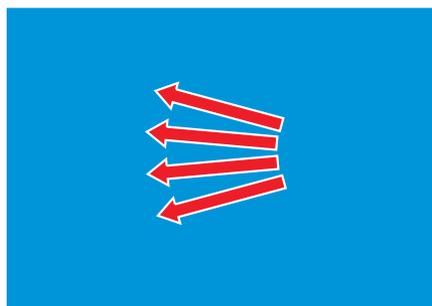
$$(\varepsilon_\gamma^{\text{c.o.i.}} \gtrsim m_e c^2) !$$





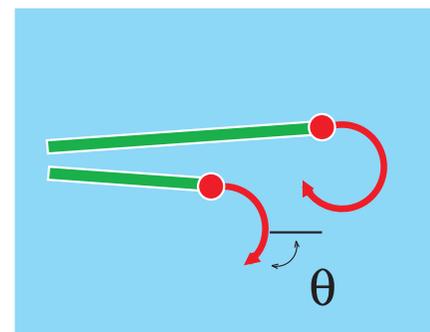
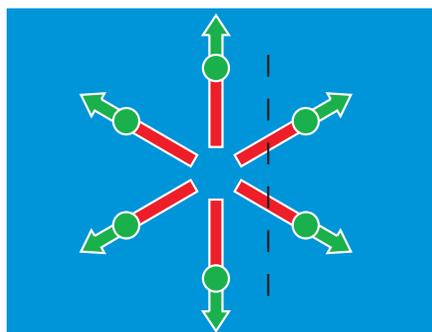
**Сопутствующая система**

**Лабораторная система**



Преобразование  
←  
Лоренца

Изотропизация  
+ конверсия



Преобразование  
→  
Лоренца  
+ конверсия  
и разворот

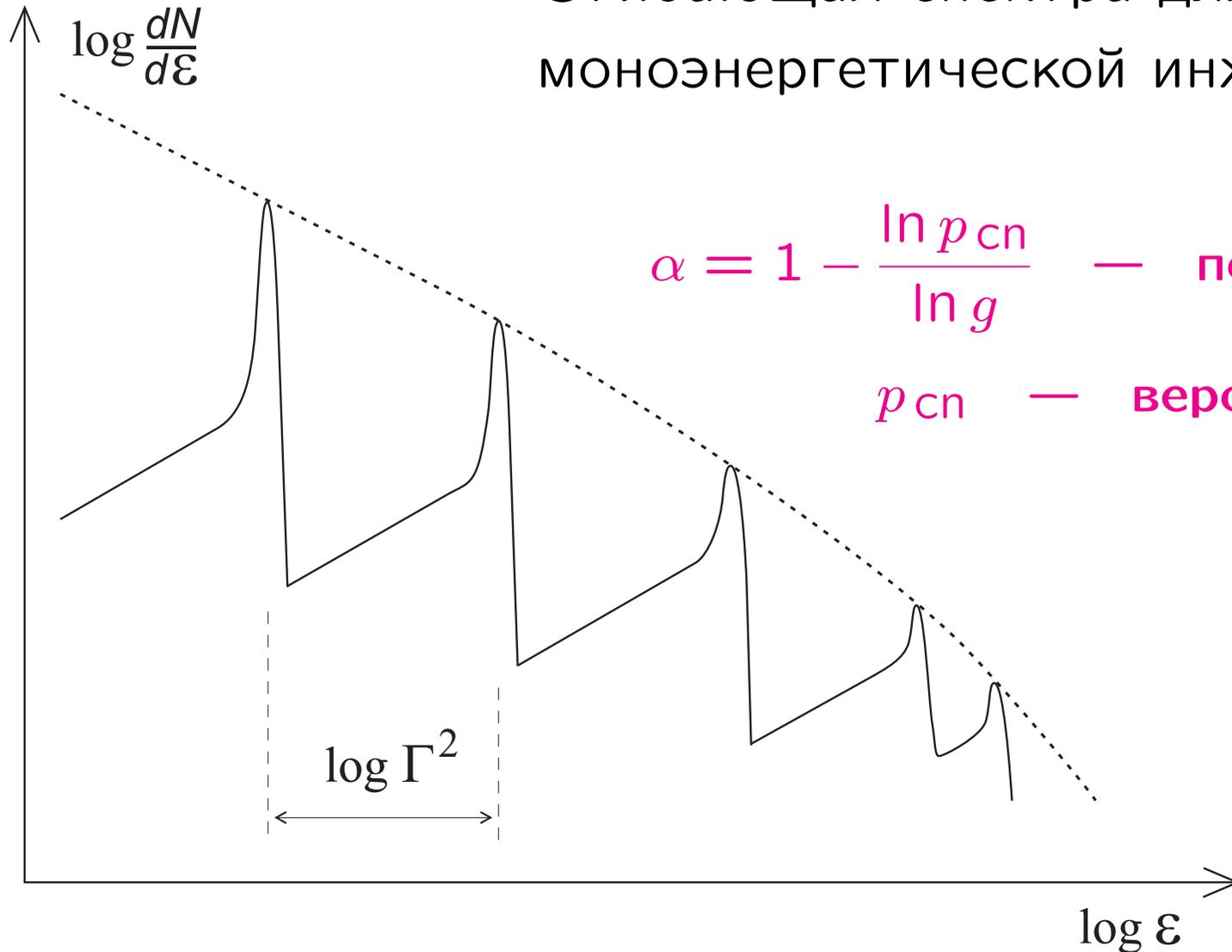
# Спектр ускоренных частиц

Огибающая спектра для случая моноэнергетической инжекции:

$$\frac{dN}{d\varepsilon} \propto \varepsilon^{-\alpha}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\ln p_{\text{cn}}}{\ln g} \quad \text{— показатель спектра}$$

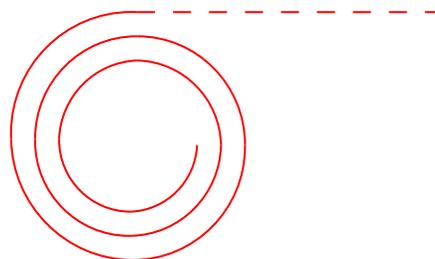
$p_{\text{cn}}$  — вероятность конверсии



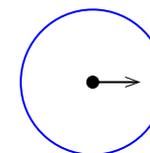
# Диаграмма направленности сопутствующего излучения

- Низкоэнергичные частицы

$$\varepsilon \ll \varepsilon_{cr}$$



Сопутствующая система

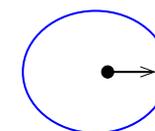
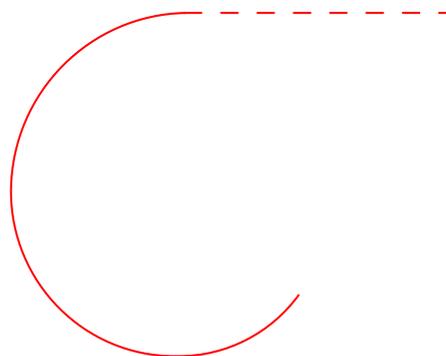


Лабораторная система



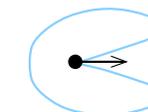
- Частицы критической энергии

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_{cr}$$



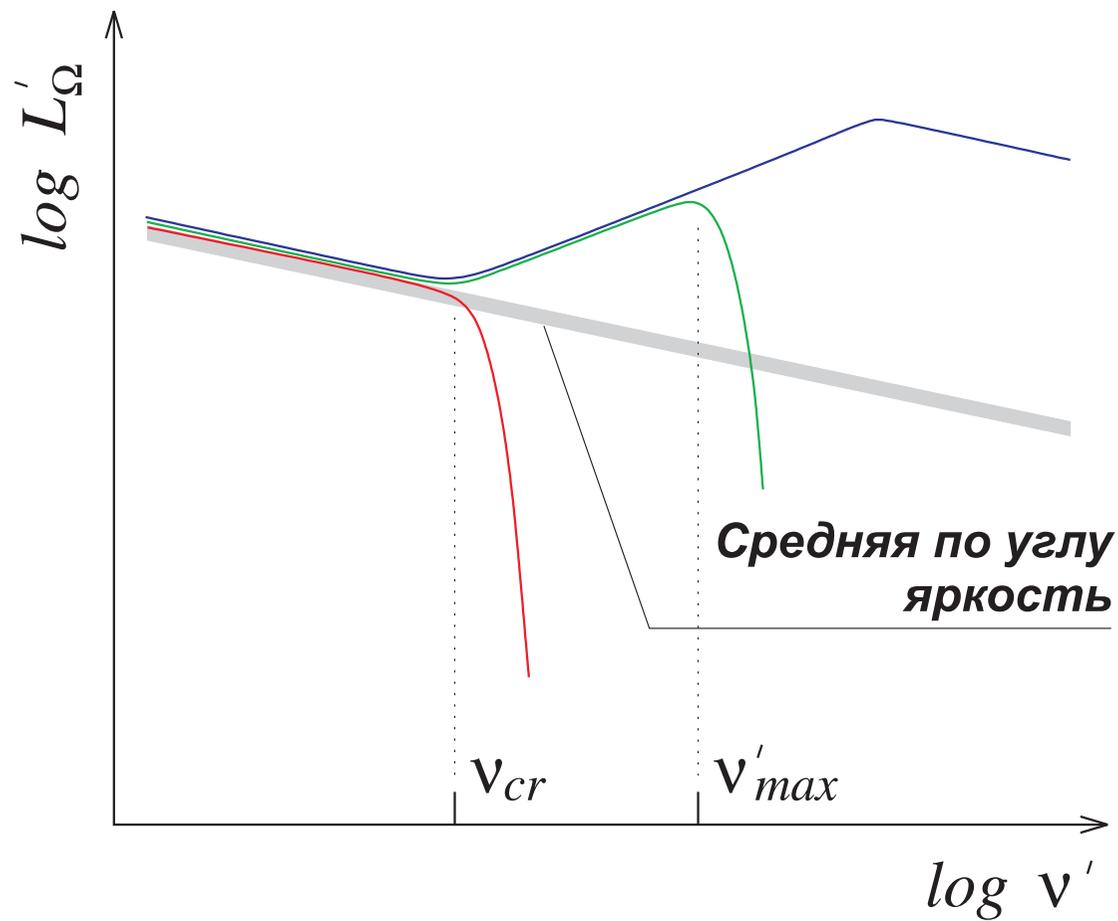
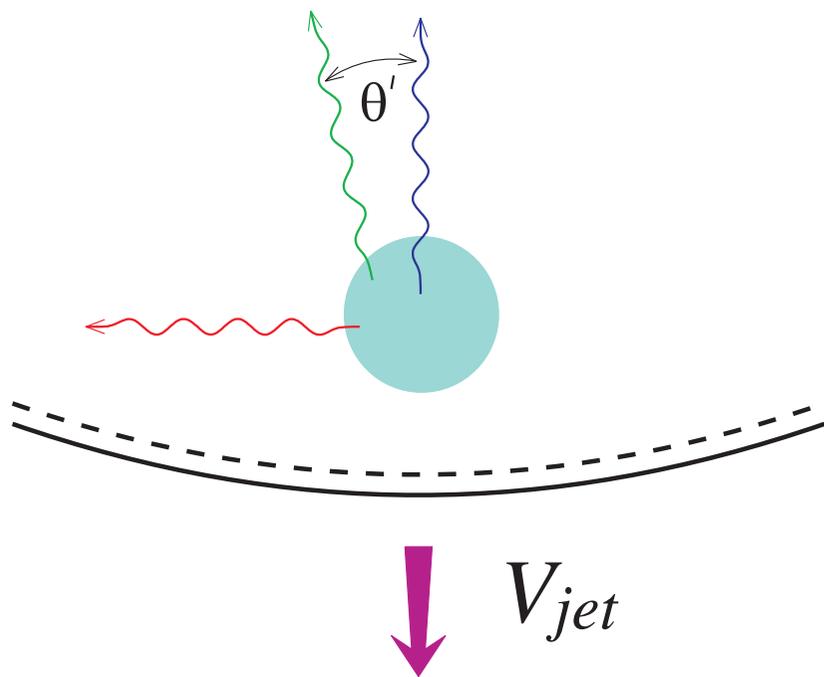
- Высокоэнергичные частицы

$$\varepsilon \gg \varepsilon_{cr}$$



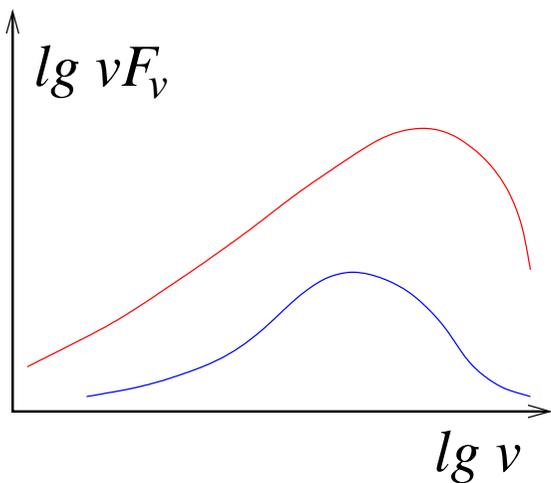
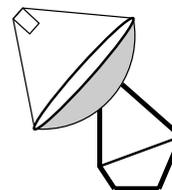
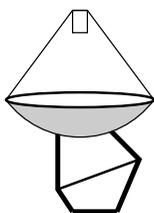
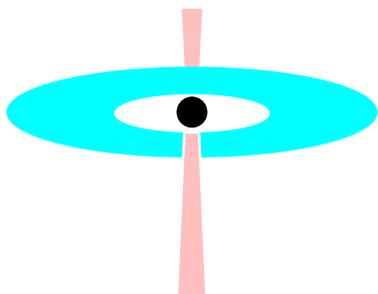
$$\varepsilon_{cr} = \frac{3 (m_e c^2)^2}{2 e^{3/2} B^{1/2}}; \quad h\nu \sim 100 \times \Gamma \text{ МэВ} \quad \text{— для синхротронных потерь}$$

# Изменение спектра для сверхкритических частиц

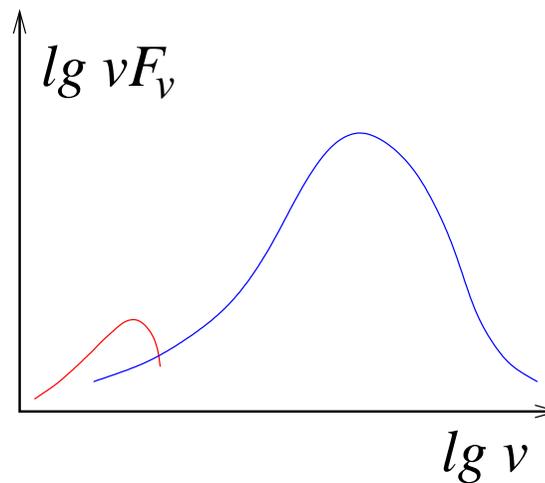


# Зависимость спектра от угла наблюдения

(неотождествленные источники жесткого излучения)



Вид по оси



Вид сбоку