

# Лекция 1: Кинетическое описание плазмы с релятивистскими частицами

Кочаровский Вл.В.

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

4-ая Школа современной астрофизики, Пущино, 7-18 июля 2008г.

# Одночастичные кинетические уравнения

$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  — функция распределения частиц сорта  $\alpha$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \text{St} \{f_\alpha\}$$

$$\mathbf{F}_\alpha = e_\alpha \mathbf{E} + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{\alpha \text{ext}}$$

$$\mathbf{p} = \gamma_\alpha m_\alpha \mathbf{v}, \quad \gamma_\alpha = \sqrt{1 + p^2 / m_\alpha^2 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Плоские волны

$$\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B} \sim \exp(i\mathbf{k}r - i\omega t), \quad D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j$$

# Дебаевская экранировка точечного заряда

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \quad \rho_0 = q_0\delta(\mathbf{r})$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\Phi_{\mathbf{k}}d\mathbf{k}$$

$$k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi\rho_0(0, \mathbf{k})$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{2\pi^2} \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k_i k_j \varepsilon_{ij}(0, \mathbf{k})} d\mathbf{k}$$

В изотропной среде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k)$$

Если

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + r_D^{-2} k^{-2},$$

то

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right)$$

Согласно классическому определению плазмы, концентрация частиц, создающих самосогласованное электромагнитное поле, должна быть достаточно велика:

$$N_\alpha r_D^3 \gg 1$$

# Самосогласованное электромагнитное поле

$$[\nabla \times \mathbf{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} \frac{\mathbf{p}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} d^3 \mathbf{p}$$

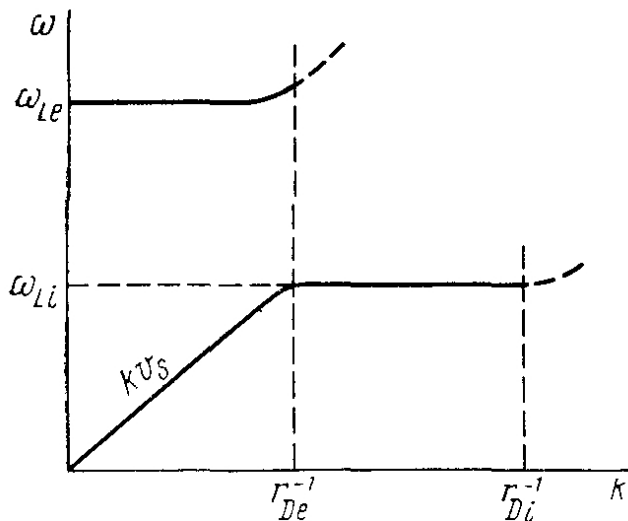
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3 \mathbf{p}$$

Квазинейтральность на масштабах  $l \gg r_D$ .

## Замечание об исключении магнитной проницаемости

$$\varepsilon(\omega, k), \mu(\omega, k) \Rightarrow \varepsilon'(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k)$$
$$\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \varepsilon'(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left[ 1 - \frac{1}{\mu(\omega, k)} \right]$$

# Спектр ленгмюровских и ионнозвуковых волн в двухтемпературной плазме.



# Гидродинамика двухтемпературной плазмы ( $p = e^- - e^+$ )

$$T_e \gg T_i, \quad \gamma_i \approx 1, \quad \gamma_e \ll M/m_e.$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{M} \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot (N_i \mathbf{v}) = 0$$

$$e\varphi = T_e \ln \frac{N_i}{N_0}, \quad e\mathbf{E} = -T_e \frac{\nabla N_i}{N_i}$$

$$v \lesssim (T_e/M)^{1/2} \ll v_{Te}, \quad v_e \gg \omega \gg v_i$$

При условии ( $\varphi_m$  — амплитуда потенциала)

$$2e\varphi_m/Mu^2 < 1$$

существуют солитоны, в которых все функции зависят от  $\xi = x - ut$ .



Столкновения, рождение и аннигиляция частиц.  
 $\tau$  — приближение. Бесстолкновительная плазма

$$\omega \gg \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}, \quad k \gg v_{T\alpha}^{-1} \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}$$

Интеграл столкновений Батнагара-Гросса-Крука

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{St}^{\alpha\beta} = -\nu_{\alpha\beta} (f_{\alpha} - N_{\alpha} \Phi_{\alpha\beta})$$

$$m_{\alpha} N_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} = m_{\beta} N_{\beta} \nu_{\beta\alpha}$$

$$\nu_{\alpha\beta} = v_{T\alpha} \sigma_0 N_{\beta}$$

# Интеграл кулоновских столкновений

$$\text{St} \{f\} = -\frac{\partial s_i}{\partial p_i}$$

$$s_\alpha = \sum \int \left[ f(\mathbf{p}) \frac{\partial f'(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} - f'(\mathbf{p}') \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right] B_{ij} d^3 \mathbf{p}'$$

$$B_{ij} v_j = B_{ij} v'_j, \quad B_{ij} \propto L$$

В релятивистском случае  $e^2/\hbar v \sim e^2/\hbar c \ll 1$  и

$$L \approx \ln \left( \frac{pa}{\hbar} \right) \approx \ln \left( \frac{T_e a}{\hbar c} \right).$$

Сравнение сечений  $e - p$  и  $e - \gamma$ :

$$\sigma_{\text{ruth}} \sim \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 L \sim \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{mc^2}{T_e} \right)^2 L$$

$$\sigma_{\text{brems}} \sim \frac{1}{137} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln \frac{T_e}{mc^2}$$

Эти сечения сравниваются при

$$\frac{T_e}{mc^2} \sim \left( \frac{137L}{\ln(137L)} \right)^{1/2}$$

Проводимость релятивистской лоренцевой плазмы:

$$\sigma = \frac{\langle v^3 p^2 \rangle}{12\pi e^2 T_e L}, \quad \nu_{ei} = \frac{4\pi e^4 L}{v^2 p^2} N_i v.$$

В ультрарелятивистском случае

$$\sigma = cT_e/\pi e^2 L \sim 10^{21} \text{ сек}^{-1}$$

# Дисперсионное уравнение

для волн в плазме, пропорциональных  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ :

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, k) \right| = 0$$

Неустойчивость волн  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  в плазме с кольцевым распределением электронов

$$f(\mathbf{p}) = \frac{N}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0})$$

$$c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon + \frac{\omega_p^2}{\gamma} \frac{\omega - kv_{\parallel}^0}{\omega - kv_{\parallel}^0 \mp \omega_B} + \Omega^2 \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{(c^2 k^2 - \omega^2)}{(\omega - kv_{\parallel}^0 \mp \omega_B)^2} = 0$$

$$\omega_B = \frac{eB}{mc\gamma} = \frac{r_H}{v_{\perp}}$$

$$\omega = \Omega + \delta\omega,$$

$$c^2 k^2 - \Omega^2 \varepsilon(\Omega) = 0$$

$$(\delta\omega)^2 \approx \Omega \frac{\omega_p^2}{\gamma} \frac{(1 - \beta_{\parallel} \sqrt{\varepsilon} - \beta_{\perp}^2)}{d(\Omega^2 \varepsilon)/d\Omega} \quad \text{при} \quad \left| \omega - kv_{\parallel}^0 \mp \omega_B \right| \ll |\delta\omega|$$

Условие неустойчивости

$$\Omega - kv_{\parallel}^0 < \Omega \beta_{\perp}^2$$

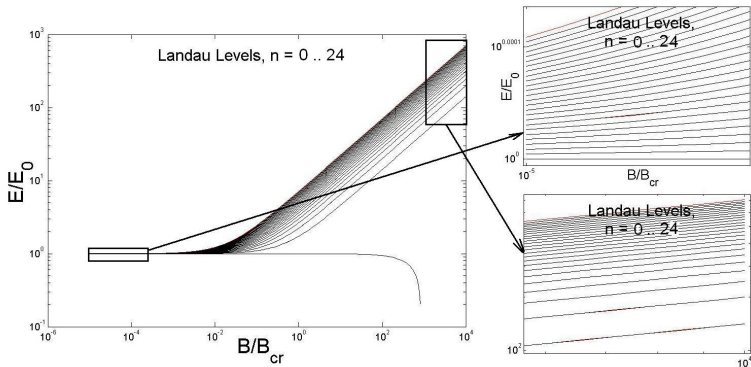
При  $\beta_{\perp}^2 = 0$  она отвечает аномальному эффекту Доплера  $v_{\parallel}^0 > v_{\text{ph}} = \omega/k$ , а в вакууме возможна благодаря неэквидистантности уровней Ландау при  $\beta_{\parallel} > 1 - \beta_{\perp}^2$ .

# Уровни Ландау

Энергия электрона в магнитном поле:

$$E_n = \sqrt{m^2 c^4 + p_{\parallel}^2 c^2 + 2 \hbar \omega_B m c^2 (n + 1/2 + \sigma(1 + \chi))}.$$

Здесь  $n$  — номер уровня Ландау,  $\sigma = \pm 1/2$  - спин электрона,  $\chi \approx \alpha/(2\pi) - 0.328\alpha^2/\pi^2 + \dots$  — поправка на аномальный магнитный момент электрона.



# Характерные параметры астрофизической плазмы

Объект	$N, \text{ см}^{-3}$	$T, \text{ эВ}$	$B, \text{ Гс}$
Межзвездная среда			
-области HI	$10^{-2}$	$10^{-6} - 10^{-5}$	$\sim 0.01$
-области HII	$10^2$	$10^{-6}$	$\sim 1$
Межпланетная среда	10	$10^{-4}$	$\sim 1$
Остатки сверхновых	$10^3$	$10^{-3}$	1 – 2
Плерионы	$10^{11} \rightarrow 10^{-15}$	$10^{12} \rightarrow 10^{-5}$	$10^{14} - 10^{15}$
Юпитер			
-ионосфера	$3 \cdot 10^5$	10	500
-магнитосфера (плазменный тор Ио)	$10^3$	$10^{-1}$	1
Солнце			
-хромосфера	$10^9 - 10^{11}$	$1 - 4 \cdot 10^3$	1
-внутренняя корона	$10^8$	$1 - 10^3$	100
Магнитные белые карлики	-	$10^6 - 10^8$	-
Магнитосферы пульсаров	$10^{12}$	$10^{12}$	-



# Typical parameters

- Active galactic nuclei (blazars)

$\Gamma \sim 5-20$ ,  $B \sim 0.1\text{G}$ ,  $n \sim 10\text{cm}^{-3}$ ,  $\gamma \sim 10^5$ ,  $L \sim 10^{16}\text{cm}$

- Microquasars (relativistic)

$\Gamma \sim 3$ ,  $B \sim 10^6\text{G}$ ,  $n \sim 10^{15}\text{cm}^{-3}$ ,  $\gamma \sim 10^2$ ,  $L \sim 10^9\text{cm}$

- Gamma-ray bursts (long)

$\Gamma \sim 300$ ,  $B \sim 10^6\text{G}$ ,  $n \sim 10^{15}\text{cm}^{-3}$ ,  $\gamma \sim 10^3$ ,  $L \sim 10^{14}\text{cm}$